Module d'un nombre complexe

Exercice 1

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Soit f l'application qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

1. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

Soit M un point distinct des points O, A et B.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de $0,\ 1$ et -1, on a :

$$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$

b. En déduire une expression de $\dfrac{M'\text{B}}{M'\text{A}}$ en fonction de $\dfrac{M\text{B}}{M\text{A}}$

2. Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$.

Montrer que si M est un point de Δ distinct du point O, alors M' est un point de Δ.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On désigne par A le point d'affixe i et par f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z - \text{i}}{\overline{z} + \text{i}}$$

1. Donner une expression de $\overline{z - \text{i}}$

2. Démontrer que $\text{O}M' = 1$ et interpréter géométriquement ce résultat.

Correction page suivante

Module d'un nombre complexe

Correction

Exercice 1

1. **a.** $z'+1=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)+1=\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{2z}+1=\dfrac{z^2+1+2z}{2z}=\dfrac{(z+1)^2}{2z}$

$z'-1=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)-1=\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{2z}-1=\dfrac{z^2+1-2z}{2z}=\dfrac{(z-1)^2}{2z}$

donc $\dfrac{z'+1}{z'-1}=\dfrac{(z+1)^2}{2z}\times\dfrac{2z}{(z-1)^2}=\dfrac{(z+1)^2}{(z-1)^2}=\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$

Conclusion : $\boxed{\dfrac{z'+1}{z'-1}=\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2}$

b. $\dfrac{M'\text{B}}{M'\text{A}}=\dfrac{|z_B-z'|}{|z_A-z'|}=\dfrac{|-1-z'|}{|1-z'|}=\left|\dfrac{-1-z'}{1-z'}\right|=\left|\dfrac{1+z'}{-1+z'}\right|$ (on a multiplié la fraction en haut et en bas par -1)

On a donc montré que $\dfrac{M'\text{B}}{M'\text{A}}=\left|\dfrac{z+1'}{z'-1}\right|$

et donc d'après la question précédente, on a :

$\dfrac{M'\text{B}}{M'\text{A}}=\left|\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2\right|=\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|^2=\left|\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right|^2=\dfrac{|z-z_B|^2}{|z-z_A|^2}=\dfrac{BM^2}{AM^2}=\left(\dfrac{BM}{AM}\right)^2$

Conclusion : $\boxed{\dfrac{M'\text{B}}{M'\text{A}}=\left(\dfrac{MB}{MA}\right)^2}$

2. SI $M\in\Delta$ alors $MA=MB$ donc $\dfrac{MB}{MA}=1$ et donc $\left(\dfrac{MB}{MA}\right)^2=1$

D'après la question précédente, on a donc $\dfrac{M'B}{M'A}=1$, c'est-à-dire $M'B=M'A$ et donc $M'\in\Delta$.

Exercice 2

1. $\overline{z-\text{i}}=\overline{z}+\text{i}$

2. $OM'=|z'|=\left|\dfrac{z-\text{i}}{\overline{z}+\text{i}}\right|=\dfrac{|z-\text{i}|}{|\overline{z}+\text{i}|}=\dfrac{|z-\text{i}|}{|\overline{z-\text{i}}|}=1$

en effet on a la propriété suivante : $|\overline{Z}|=|Z|$ pour tout Z de $\mathbb{C}$.

On a donc $OM'=1$ ce qui signifie que M' appartient au cercle de centre O de rayon 1.