Affixe d'un point ou d'un vecteur

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On désigne par A, B les points d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}$

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\mathrm{i}(z - 2 + 3\mathrm{i})}{z - \mathrm{i}}$$

Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On désigne par A le point d'affixe i et par f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z - \mathrm{i}}{\overline{z} + \mathrm{i}}$$

1. Calculer l'affixe du point B$'$, image du point B d'affixe $2 - \mathrm{i}$ par l'application f.
2. Démontrer que l'application f n'admet pas de point invariant.

   On rappelle qu'un point invariant est un point confondu avec son image.

Correction page suivante

Affixe d'un point ou d'un vecteur

Correction

Exercice 1

Si M' appartient à l'axe des imaginaires purs alors $z' = \mathrm{i}b$ avec b réel et $b \neq 0$ car $M' \neq B$.

D'après $z' = \dfrac{\mathrm{i}(z-2+3\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}}$, on en déduit donc $\mathrm{i}b = \dfrac{\mathrm{i}(z-z_A)}{z-z_B}$

puis par produit en croix $\mathrm{i}(z-z_A) = \mathrm{i}b(z-z_B)$

On divise par i non nul, on a donc : $(z-z_A) = b(z-z_B)$.

$z - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$

$z - z_B$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$

On a donc $\overrightarrow{AM} = b\,\overrightarrow{BM}$ avec b réel ce qui signifie que les vecteurs sont colinéaires et donc que les points A, B et M sont alignés ou que M appartient à la droite (AB)

Exercice 2

1. Affixe de l'image de B : $z'_B = \dfrac{z_B - \mathrm{i}}{\overline{z_B} + \mathrm{i}} = \dfrac{2-\mathrm{i}-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}+\mathrm{i}} = \dfrac{2-2\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

On multiplie par le conjugué du dénominateur pour trouver la forme algébrique de z'_B :

$$z'_B = \frac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1-2\mathrm{i}-1}{2} = \frac{-2\mathrm{i}}{2} = -\mathrm{i}$$

2. M est invariant $\iff M' = M \iff z' = z \iff \dfrac{z-\mathrm{i}}{\overline{z}+\mathrm{i}} = z \iff z - \mathrm{i} = z(\overline{z}+\mathrm{i})$

On pose $z = a + \mathrm{i}b$, on a donc $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$

L'équation devient : $a + \mathrm{i}b - \mathrm{i} = (a+\mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b + \mathrm{i})$

puis après développement : $a + \mathrm{i}b - \mathrm{i} = a^2 - \mathrm{i}ab + \mathrm{i}a + \mathrm{i}ab + b^2 - b$

et après arrangement des termes : $a - a^2 - b^2 + b + \mathrm{i}(b-1-a) = 0$

Remarque : l'écriture ci-dessus est l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique, en effet les nombres a et b étant réels, les expressions $a - a^2 - b^2 + b$ et $b - 1 - a$ le sont aussi.

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles donc a et b sont solution du système :

$$\begin{cases} a - a^2 - b^2 + b &= 0 \\ b - 1 - a &= 0 \quad \longrightarrow \quad b = 1 + a \end{cases}$$

On substitue dans la première équation, on obtient : $a - a^2 - (1+a)^2 + 1 + a = 0$ donc $a - a^2 - 1 - 2a - a^2 + 1 + a = 0$

après simplification $-2a^2 = 0$ donc $a = 0$ d'où on en déduit $b = 1$.

$a = 0$ et $b = 1$ sont bien solution du système donc on a une seule solution possible pour z : $z = \mathrm{i}$.

On a donc démontré que le seul point invariant possible a pour affixe $z = \mathrm{i}$ mais ce point est exclu.

Conclusion : f n'a donc aucun point invariant.