ENI
2007

Ex 1

$$f(x) = (1-x)\,e^x$$

1)
* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \times 0$ FI

$= \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x e^x = 0 - 0 = 0.$

donc Asymptote : $\Delta : \boxed{y=0}$

* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \times (+\infty) = -\infty.$

2) $f'(x) = -e^x + (1-x)e^x$

$= -e^x + e^x - x e^x$

$= \boxed{-x e^x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$.

x		0	
$-x$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

3) T_1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = -e(x-1) + 0$

$\boxed{y = -ex + e}$

T_{-1} : $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$y = \frac{1}{e}(x+1) + \frac{2}{e}$

$\boxed{y = \frac{x}{e} + \frac{3}{e}}$

$f'(-1) = 1\,e^{-1} = \frac{1}{e}$

$f(-1) = 2\,e^{-1} = \frac{2}{e}$

Coeff. directeur de T_1 : $-e$ donc vecteur directeur $\vec{u}(1, -e)$

Coeff. directeur de T_{-1} : $\frac{1}{e}$ donc vecteur directeur $\vec{v}(1, \frac{1}{e})$

le repère est orthonormé et $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

$= 1 \times 1 + (-e) \times \frac{1}{e}$

$= 1 - 1$

$= 0$

donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux
et donc T_1 et T_{-1} sont perpendiculaires

ENI 2007

Ex 1 (2)

$$g(x) = (1-x)\,e^x - \left(\frac{x+3}{e}\right) = \overbrace{(1-x)\,e^x}^{uv} - \overbrace{\frac{1}{e} \times (x+3)}^{ku}$$

2) b) $g'(x) = -e^x + (1-x)\,e^x - \frac{1}{e}$

$g'(x) = -e^x + e^x - x e^x - \frac{1}{e} = -x e^x - \frac{1}{e}$

$g''(x) = -e^x - x e^x = \underset{\oplus}{e^x}\,(-1-x)$

fct affine $\searrow$ qui s'annule en -1

$g'(-1) = 1\,e^{-1} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} = 0$

$g(-1) = 2\,e^{-1} - \frac{2}{e} = 0$

c) Tangente T_{-1} : $y = \frac{x}{e} + \frac{3}{e}$

On cherche le signe de $f(x) - \left(\frac{x}{e} + \frac{3}{e}\right)$

$f(x) - \left(\frac{x}{e} + \frac{3}{e}\right) = (1-x)\,e^x - \left(\frac{x+3}{e}\right) = g(x)$

Comme $g(x) \geq 0$ sur $]-\infty, -1]$

on a donc $\mathcal{C}_f$ au-dessus de T_{-1} sur $]-\infty, -1]$

et $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de T_{-1} sur $[-1 ; +\infty[$

puisque $g(x) \leq 0$ sur $[-1, +\infty[$.