Montrer qu'une suite est constante

Méthode :

Pour montrer qu'une suite (u_n) est constante, on montre que pour tout n, on a $u_{n+1} = u_n$

Exercice 1

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \geqslant 0$

$v_0 = 12$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ pour tout $n \geqslant 0$

On pose $t_n = 3v_n + 2u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Démontrer que la suite (t_n) est constante.

Exercice 2

Soit la suite (a_n) définie par : $a_0 = -1$ et $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$ pour tout $n \geqslant 0$

On pose $u_n = \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{2}{3}a_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Démontrer que la suite (u_n) est constante.

Correction page suivante

Exercice 1

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \geqslant 0$

$v_0 = 12$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ pour tout $n \geqslant 0$

On pose $t_n = 3v_n + 2u_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Démontrer que la suite (t_n) est constante.

Soit n entier naturel,

$$\begin{aligned}
t_{n+1} &= 3v_{n+1} + uv_{n+1} \\
&= u_n + 2v_n + u_n + v_n \\
&= 2u_n + 3v_n \\
&= t_n
\end{aligned}$$

donc pour tout n on a $t_{n+1} = t_n$ donc la suite (t_n) est constante.

Exercice 2

Soit la suite (a_n) définie par : $a_0 = -1$ et $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$ pour tout $n \geqslant 0$

On pose $u_n = \dfrac{1}{3}a_{n+1} + \dfrac{2}{3}a_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Démontrer que la suite (u_n) est constante.

Soit un entier naturel n,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{3}a_{n+2} + \frac{2}{3}a_{n+1} \\
&= \frac{1}{3}(-a_{n+1} + 2a_n) + \frac{2}{3}a_{n+1} \\
&= -\frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3}a_{n+1} \\
&= \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n \\
&= u_n
\end{aligned}$$

donc (u_n) est constante.