Exercice

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

- **a.** Calculer v_0.
- **b.** Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
- **c.** En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- **d.** Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

- **a.** Calculer w_0.
- **b.** En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
- **c.** En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
- **d.** Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

25/01/11 **Suites** **TS**

Exercice

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = -1,\ u_1 = \frac{1}{2} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

- **a.** Calculer v_0.
- **b.** Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
- **c.** En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- **d.** Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}.$$

- **a.** Calculer w_0.
- **b.** En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
- **c.** En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.
- **d.** Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$