Métropole Sept 2012

1)

| $x$ | $-\infty$ | | $a$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $b$ | $\searrow$ | $-\infty$ |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

2a) donc la courbe de $f'$ est $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_F$.

b) $f'(a) = 0$ donc $\boxed{1 \leq a \leq 2}$ d'après $\mathcal{C}_2$

$F'(x) = f(x)$ pr $\forall\, x \in \mathbb{R}$

donc $F'(a) = f(a) = b$.

d'après $\mathcal{C}_1$ $F'(a) > 0$ car $F'(a)$ est le coeff. directeur de la tangente au pt d'abscisse a.

donc $\boxed{b > 0}$

3a) $f(x) = k e^{\frac{1}{2}x} + x + 2$

$A \in \mathcal{C}_1$ donc $A \in \mathcal{C}_F$ donc $F(0) = -2$ (1)

$B \in \mathcal{C}_2$ donc $B \in \mathcal{C}_{f'}$ donc $f'(0) = \frac{1}{2}$ (2)

d'après (2) $f'(x) = k \times \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} + 1$ donc $k \times \frac{1}{2} e^0 + 1 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} k = -\frac{1}{2}$

$\boxed{k = -1}$

donc $\boxed{f(x) = -e^{\frac{1}{2}x} + x + 2}$

$F(x) = -2e^{\frac{1}{2}x} + \frac{x^2}{2} + 2x + C$

$u' e^u = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x}$

primitive : $e^u = e^{\frac{1}{2}x}$

et $-e^{\frac{1}{2}x} = -2 \times \boxed{\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x}}$

d'après $F(0) = -2$

on a $-2e^0 + C = -2$

$-2 + c = -2$ donc $c = 0$

donc $\boxed{F(x) = -e^{\frac{1}{2}x} + \frac{x^2}{2} + 2x}$

Pour trouver a et b : On résout $f'(x) = 0$

$f'(x) = -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} + 1$

$-\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x} + 1 = 0$

$\frac{1}{2}x = \ln 2$

$\boxed{x = 2\ln 2}$

donc $\boxed{a = 2\ln 2}$

et $b = f(a) = f(2\ln 2) = -e^{\ln 2} + 2\ln 2 + 2 = \boxed{2\ln 2}$