Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\overline{z}-1}$$

1. Soit C le point d'affixe $z_{\text{C}} = -2 + \text{i}$.

  a. Calculer l'affixe $z_{\text{C}'}$ du point C′ image de C par la transformation f, et placer les points C et C′ dans le repère donné ci-dessous.

  b. Montrer que le point C′ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

  c. Montrer que les points A, C et C′ sont alignés.

2. Déterminer et représenter sur la figure donnée ci-dessous l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.

3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}$.

4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.

Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?

5. On a placé un point D sur la figure ci-dessous. Construire son image D′ par la transformation f.