Exo Conjugué.

Pondichery Avril 2012

$z_A = 1 \qquad z_B = -1$

$f : M(z \neq 1) \longrightarrow M'(z')$ avec $z' = \dfrac{1-z}{\bar{z}-1}$

1a) $z_C = -2+i$

$$z_C' = \frac{1-(-2+i)}{\overline{-2+i}-1} = \frac{3-i}{-2-i-1} = \frac{3-i}{-3-i} = \frac{(3-i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)}$$

$$z_C' = \frac{-9+3i+3i+1}{9+1} = \frac{-8+6i}{10} = \boxed{-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i}$$

b) Montrer que $C' \in \mathcal{C}(O,1)$

Montrons que $OC' = 1$

$$OC' = |z_C'| = \left|-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$OC' = \sqrt{\frac{16}{25}+\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

donc $C' \in \mathcal{C}(O;1)$

c) Montrer que A, C, C' sont alignés.

Montrons que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont colinéaires

$$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -2+i-1 = -3+i$$

$$z_{\overrightarrow{AC'}} = z_C' - z_A = -\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i-1 = -\frac{9}{5}+\frac{3}{5}i$$

on a $z_{\overrightarrow{AC'}} = \dfrac{3}{5} z_{\overrightarrow{AC}}$

donc $\overrightarrow{AC'} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

et A, C, C' sont alignés.

2) Déterminer l'ensemble Δ des points M qui ont pour image A

$$M \in \Delta \Leftrightarrow z' = z_A \Leftrightarrow \frac{1-z}{\bar{z}-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - z = \bar{z} - 1$$

$$\Leftrightarrow 2 - z - \bar{z} = 0$$

On pose $z = x+iy$ avec x, y réels.

$\bar{z} = x - iy$

et $2 - z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow 2-(x+iy)-(x-iy) = 0$

$\Leftrightarrow 2 - x - \cancel{iy} - x + \cancel{iy} = 0$

$\Leftrightarrow 2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$

donc $M \in \Delta \Leftrightarrow x = 1$

Δ est donc la droite d'équation $\boxed{x = 1}$.

3) Montrer que pour tout $M \neq A$, on a $M' \in \mathcal{C}$ $\qquad \mathcal{C} = \mathcal{C}(O;1)$

Montrons que $OM' = 1$

On a $OM' = |z'| = \left|\dfrac{1-z}{\bar{z}-1}\right| = \dfrac{|1-z|}{|\bar{z}-1|} = \dfrac{|1-z|}{|\overline{z-1}|}$

$= \dfrac{|1-z|}{|z-1|}$ car $|\bar{z}| = |z| \ \forall z \in \mathbb{C}$

$= \dfrac{|1-z|}{|(-1)(1-z)|} = \dfrac{|1-z|}{|1-z|} = 1$

donc $OM' = 1$ et $M' \in \mathcal{C}$.

4) Montrer que pour tout $z \neq 1$ $\quad \dfrac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}$

$$\frac{z'-1}{z-1} = \frac{\frac{1-z}{\bar{z}-1}-1}{z-1} = \frac{\frac{1-z-\bar{z}+1}{\bar{z}-1}}{z-1} = \frac{2-z-\bar{z}}{(\bar{z}-1)(z-1)}$$

Méthode 1. Poser $z = x+iy$ avec x, y réels

$2 - z - \bar{z} = 2 - x - \cancel{iy} - x + \cancel{iy} = 2 - 2x \in \mathbb{R}$

$(\bar{z}-1)(z-1) = (x-iy-1)(x+iy-1) = x^2+1-2x+y^2 \in \mathbb{R}$

Méthode 2. $2 - z - \bar{z} = 2 - (z+\bar{z}) = 2 - 2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$

$(\bar{z}-1)(z-1) = \underbrace{(\overline{z-1})(z-1)}_{\bar{Z}Z = |Z|^2} = |z-1|^2 \in \mathbb{R}$.

Donc $\dfrac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}$

cad $z'-1 = k(z-1)$ avec $k \in \mathbb{R}$

cad $z_{M'} - z_A = k(z_M - z_A)$

donc $z_{\overrightarrow{AM'}} = k\, z_{\overrightarrow{AM}}$ $k \in \mathbb{R}$.

donc $\overrightarrow{AM'} = k\, \overrightarrow{AM}$

Conclusion A, M, M' sont alignés.

5) Construction de D' image de D.

D'après 3) $D \neq A$ donc $D' \in \mathcal{C}$

D'après 4) A, D, D' sont alignés.

donc deux possibilités pour D'.

Méthode 1 : D' sera déterminé par le signe de k

$$k = \frac{z_D'-1}{z_D-1} = \frac{2-2\,\mathrm{Re}(z_D)}{|z_D-1|^2}$$

$\mathrm{Re}(z_D) < 0$

donc $2 - 2\,\mathrm{Re}(z_D) > 0$

et $|z_D - 1|^2 > 0$ donc $k > 0$ pour D, D'

or $\overrightarrow{AD'} = k\, \overrightarrow{AD}$

donc $\overrightarrow{AD'}$ et $\overrightarrow{AD}$ ont même sens

Méthode 2 : D'après 2) l'ensemble des points M ayant pour image A est la droite Δ.

Comme $D \notin \Delta$, on a $D' \neq A$.