Montrer qu'une suite est arithmétique

Méthode :

Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on montre que pour tout n, on a $u_{n+1} = u_n + r$ avec $r \in \mathbb{R}$.

Pour cela on peut calculer $u_{n+1} - u_n$

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = -6n + 7$ pour tout entier naturel n.

Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique.

Exercice 2

Soient les suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 1}{U_n + 3}$ et $V_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$ pour tout $n \geqslant 0$.

On admet que $U_n \neq 1$ pour tout entier naturel n, ce qui assure l'existence de la suite (V_n).

Montrer que (V_n) est arithmétique.

Exercice 3

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1}$.

On pose $V_n = \dfrac{1}{U_n}$ pour tout n entier naturel.

On admet que $U_n \neq 0$ pour tout entier naturel n, ce qui assure l'existence de la suite (V_n).

1. Démontrer que la suite (V_n) est arithmétique.

2. En déduire le terme général de (V_n) puis celui de (U_n) (c'est-à-dire l'expression de V_n puis U_n en fonction de n).

Correction page suivante

Nathalie Arnaud - Lycée Théophile Gautier - Tarbes

Correction

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = -6n + 7$ pour tout entier naturel n.

Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique.

Réponse : Soit un entier naturel n,

$\boxed{u_{n+1}} = -6(n+1) + 7 = -6n - 6 + 7 = \boxed{u_n - 6}$ donc la suite (u_n) est arithmétique de raison -6

Autre méthode : $u_{n+1} - u_n = -6(n+1) + 7 - (-6n + 7) = -6n - 6 + 7 + 6n - 7 = -6$

donc pour tout entier n, on a : $\boxed{u_{n+1} = u_n - 6}$ et donc la suite (u_n) est arithmétique de raison -6

Exercice 2

Soient les suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 1}{U_n + 3}$ et $V_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$ pour tout $n \geqslant 0$.

On admet que $U_n \neq 1$ pour tout entier naturel n, ce qui assure l'existence de la suite (V_n).

Montrer que (V_n) est arithmétique.

Réponse : Soit n entier naturel,

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1} - 1} = \frac{1}{\dfrac{5U_n - 1}{U_n + 3} - 1} = \frac{1}{\dfrac{5U_n - 1 - (U_n + 3)}{U_n + 3}} = \frac{1}{\dfrac{5U_n - 1 - U_n - 3}{U_n + 3}} = \frac{1}{\dfrac{4U_n - 4}{U_n + 3}} = \frac{U_n + 3}{4U_n - 4}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + 3}{4U_n - 4} - \frac{1}{U_n - 1} = \frac{U_n + 3}{4U_n - 4} - \frac{4}{4U_n - 4} = \frac{U_n - 1}{4U_n - 4} = \frac{U_n - 1}{4(U_n - 1)} = \frac{1}{4}$$

donc pour tout entier n, on a : $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{4}$ et donc $\boxed{V_{n+1} = V_n + \dfrac{1}{4}}$

Conclusion : (V_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$

Exercice 3

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1}$.

On pose $V_n = \dfrac{1}{U_n}$ pour tout n entier naturel.

On admet que $U_n \neq 0$ pour tout entier naturel n, ce qui assure l'existence de la suite (V_n).

1. Démontrer que la suite (V_n) est arithmétique.
2. En déduire le terme général de (V_n) puis celui de (U_n) (c'est-à-dire l'expression de V_n puis U_n en fonction de n).

Réponse :

1. Soit n entier naturel, $V_{n+1} = \dfrac{1}{U_{n+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{U_n}{U_n + 1}} = \dfrac{U_n + 1}{U_n}$ puis $V_{n+1} - V_n = \dfrac{U_n + 1}{U_n} - \dfrac{1}{U_n} = \dfrac{U_n}{U_n} = 1$

   donc pour tout entier n, on a : $V_{n+1} - V_n = 1$ et donc $\boxed{V_{n+1} = V_n + 1}$

   Conclusion : (V_n) est arithmétique de raison 1

2. On a : $\boxed{V_n} = V_0 + nr = \boxed{\dfrac{1}{2} + n}$

   On a : $V_n = \dfrac{1}{U_n}$ donc $\boxed{U_n} = \dfrac{1}{V_n} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + n} = \dfrac{1}{\dfrac{1 + 2n}{2}} = \boxed{\dfrac{2}{1 + 2n}}$