Term S : Correction du devoir de rentrée

Exercice 1

On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique.

1) f est définie ssi $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} / \{2\}$.

2) a) f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - x - 1$ et $v(x) = x - 2$ donc $u'(x) = 2x - 1$ et $v'(x) = 1$.

On a donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{(2x-1)(x-2) - (x^2 - x - 1)\times 1}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x - x + 2 - x^2 + x + 1}{(x-2)^2}$

Ainsi, on a bien $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$.

b) Pour dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$, il faut étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}_f$.

Le dénominateur est un carré donc toujours positif. Etudions le signe du numérateur. Il s'agit d'un polynôme du second degré. Son discriminant est : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$.

$\Delta > 0$ donc ce polynôme admet deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 3$.

Il est du signe de $a = 1$ donc positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre elles.

On en déduit le tableau de variation de f sur $\mathcal{D}_f$:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		+	0	−	‖	−	0	+	
$(x-2)^2$		+		+	‖	+		+	
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
f		↗	1	↘	‖	↘	5	↗	

3) La tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 a pour équation $y = f'(4)(x - 4) + f(4)$.

Or $f(4) = \dfrac{11}{2}$ et $f'(4) = \dfrac{3}{4}$ donc T a pour équation $y = \dfrac{3}{4}(x - 4) + \dfrac{11}{2} \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{4}x - 3 + \dfrac{11}{2}$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{2}$.

4) La droite d'équation $x + y = 2014$ ou encore $y = -x + 2014$ a pour coefficient directeur -1.

Si la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à cette droite, alors elle a le même coefficient directeur : -1.

Or l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ et son coefficient directeur est $f'(a)$. On doit donc résoudre l'équation $f'(a) = -1$, ou bien $f'(x) = -1$.

$\dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = -1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = -1(x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = -1(x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 4x - 4$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 7 = 0$. Ceci est une équation du second degré. Le discriminant est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 7 = 8$.

$\Delta > 0$ donc il y a deux solutions : $x_1 = \dfrac{8 - \sqrt{8}}{2 \times 2} = \dfrac{8 - 2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{8 + 2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$.

Il existe donc deux points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $x + y = 2014$: ils ont pour abscisses respectives $\dfrac{4-\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}29$ et $\dfrac{4+\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}71$.

Exercice 2

1) On peut lire que $g(2) = 2$, $g(0) = 0$ et $g(3) = 1$.

$g'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Cette tangente est la droite $\mathcal{D}_2$ qui passe par $A(0\ ;\ 0)$ et $B(5\ ;\ 6)$ donc son coefficient directeur est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{6-0}{5-0} = \dfrac{6}{5}$.

Ainsi, $g'(0) = \dfrac{6}{5}$.

2) $g'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -2. Cette tangente est la droite $\mathcal{D}_1$ qui « descend » donc son coefficient directeur est négatif. Ainsi, $g'(-2)$ est négatif.

3) L'équation $g'(x) = 0$ admet deux solutions qui sont les abscisses des points de la courbe où il y a une tangente horizontale (c'est-à-dire de coefficient directeur égal à 0).

Graphiquement, on peut dire que les solutions de cette équation sont -1 et 2.

4) Sens de variations de g : g est décroissante sur $[-3\ ;\ -1]$ et sur $[2\ ;\ 4]$; g est croissante sur $[-1\ ;\ 2]$.

On en déduit que $g'(x)$ est négative sur $[-3\ ;\ -1[$ et sur $]\ 2\ ;\ 4]$, positive sur $]\ -1\ ;\ 2[$ (nulle en -1 et en 2).

Exercice 3

1) $C_1 = 3\,000 + \dfrac{2{,}5}{100} \times 3\,000 = 3\,000 + 75 = 3\,075$ €.

$C_2 = 3\,075 + \dfrac{2{,}5}{100} \times 3\,075 = 3\,075 + 76{,}875 = 3\,151{,}875 \approx 3\,151{,}87$ €.

2) $C_{n+1} = C_n + \dfrac{2{,}5}{100} \times C_n = \left(1 + \dfrac{2{,}5}{100}\right) C_n = 1{,}025\, C_n$ pour tout entier naturel n.

On en déduit que la suite (C_n) est géométrique de raison $q = 1{,}025$ et de premier terme $C_0 = 3\,000$.

Ainsi, $C_n = C_0 \times q^n$, c'est-à-dire que $C_n = 3\,000 \times 1{,}025^n$ pour tout nombre entier naturel n.

3) a) Pour la valeur $S = 3\,300$ saisie, voici le tableau complété :

Valeur de n	0	1	2	3	4
Valeur de U	3 000	3 075	3 152	3 231	3 311
Condition $U \leq S$	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

b) Quand la valeur de S saisie est 3 300, on en déduit que l'affichage obtenu est 2000 + 4 = 2004.

c) Quand on saisit un nombre S supérieur à 3 000, le nombre obtenu en sortie de cet algorithme est l'année à partir de laquelle le capital placé est supérieur à S.

4) Au 1er janvier 2013, le capital placé est $C_{13} = 3\,000 \times 1{,}025^{13} \approx 4\,136$ €. Le client avait besoin d'une somme de 5 000 euros donc le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date.

5) On cherche un entier naturel n tel que $C_n \geq 30\,000 \Leftrightarrow 3000 \times 1{,}025^n \geq 30\,000 \Leftrightarrow 1{,}025^n \geq 10$.

La calculatrice indique que $1{,}025^{93} \approx 9{,}94$ et $1{,}025^{94} \approx 10{,}19$. C'est donc à partir du 1er janvier de l'année 2094 que le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

Exercice 4

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2$.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$, donc $u_n = 12 + v_n$.

1) $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0,9u_n + 1,2 - 12 = 0,9u_n - 10,8 = 0,9(v_n + 12) - 10,8 = 0,9v_n + 10,8 - 10,8 = 0,9v_n$.

Le fait que $v_{n+1} = 0,9v_n$ pour tout entier naturel n prouve que la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 12 = 10 - 12 = -2$ et de raison $q = 0,9$.

2) On en déduit que $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times 0,9^n$.

3) $u_n = 12 + v_n = 12 - 2 \times 0,9^n$ pour tout entier naturel n.

Partie B

1) Si u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année 2012+ n, alors d'après l'énoncé, on a $u_{n+1} = u_n - \dfrac{10}{100} u_n + 1,2 = \left(1 - \dfrac{10}{100}\right) u_n + 1,2 = 0,9u_n + 1,2$. Cette situation peut donc bien être modélisée par la suite (u_n).

2) Algorithme calculant la population de la ville de Bellecité l'année 2012 + n :

VARIABLES *a*, *i*, *n*. INITIALISATION Choisir *n* *a* prend la valeur 10 TRAITEMENT Pour *i* allant de 1 à *n*, *a* prend la valeur 0,9*a* + 1,2 SORTIE Afficher *a*

3) a) Déterminons le plus petit entier naturel n tel que :

$12 - 2 \times 0,9^n > 11,5 \Leftrightarrow -2 \times 0,9^n > 11,5 - 12 \Leftrightarrow -2 \times 0,9^n > -0,5 \Leftrightarrow 2 \times 0,9^n < 0,5 \Leftrightarrow 0,9^n < 0,25$.

La calculatrice indique que $0,9^{13} \approx 0,254$ et $0,9^{14} \approx 0,229$. L'entier n cherché est donc $n = 14$.

b) Interprétation : c'est à partir de l'année 2012 + 14 = 2026 que la population de la ville Bellecité dépassera 11,5 milliers, soit 11 500 habitants.

Exercice 5

Partie A

1) On a une épreuve de Bernoulli qui consiste à tirer une boule dans le sac en remettant à chaque fois la boule tirée dans ce sac. Elle conduit à deux issues : le succès S : « la boule tirée est rouge » de probabilité $p = 7/10 = 0,7$ et l'échec $\overline{S}$: « la boule tirée est bleue » de probabilité $1 - 0,7 = 0,3$.

On la répète 9 fois de façons identiques et indépendantes. Soit R la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de boules rouges tirées.

R suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,7$.

2) a) La probabilité de l'événement (R = 6) est $P(\text{R} = 6) = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} \times 0,7^6 \times 0,3^{9-6} \approx 0,267$.

<u>Remarque</u> : la calculatrice donne directement P(R = 6). Sur la casio Graph35+, taper :

$\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{STAT}}$ $\boxed{\text{DIST}}$ $\boxed{\text{BINM}}$ $\boxed{\text{Bpd}}$ ce qui affiche à l'écran BinominalPD

Ecrire alors BinominalPD(6,9,0.7) et on obtient 0.266827932

b) $P(5 \leq \text{R} \leq 8) = P(\text{R} = 5) + P(\text{R} = 6) + P(\text{R} = 7) + P(\text{R} = 8) \approx 0,861$ car :

$P(\text{R} = 5) = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} \times 0,7^5 \times 0,3^{9-5} \approx 0,1715$; $P(\text{R} = 7) = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} \times 0,7^7 \times 0,3^{9-7} \approx 0,2668$;

$P(\text{R} = 8) = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} \times 0,7^8 \times 0,3^{9-8} \approx 0,1556$.

c) La probabilité d'obtenir au plus six boules rouges est :

$P(\text{R} \leq 6) = 1 - P(\text{R} > 6) = 1 - (P(\text{R} = 7) + P(\text{R} = 8) + P(\text{R} = 9)) \approx 1 - 0,463 \approx 0,537$.

<u>Remarque</u> : la calculatrice donne directement $P(\text{R} \leq 6)$. Sur la casio Graph35+, taper :

$\boxed{\text{OPTN}}$ $\boxed{\text{STAT}}$ $\boxed{\text{DIST}}$ $\boxed{\text{BINM}}$ $\boxed{\text{Bcd}}$ ce qui affiche à l'écran BinominalCD

Ecrire alors BinominalCD(6,9,0.7) et on obtient 0.537168834

d) La probabilité d'obtenir au moins huit boules rouges est :

$P(\text{R} \geq 8) = P(\text{R} = 8) + P(\text{R} = 9) = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} \times 0,7^8 \times 0,3^{9-8} + 0,7^9 \approx 0,196$.

Partie B On effectue n tirages ($n \in \mathbb{N}^*$)

1) Comme dans la partie A, si on appelle R la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, R suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,7$. La probabilité p_n d'obtenir au moins une boule rouge est $p_n = P(\text{R} \geq 1) = 1 - P(\text{R} < 1) = 1 - P(\text{R} = 0) = 1 - 0,3^n$.

2) Déterminons la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que la probabilité p_n d'obtenir au moins une boule rouge soit strictement supérieure à 0,99 :

$p_n > 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,3^n > 0,99 \Leftrightarrow -0,3^n > 0,99 - 1 \Leftrightarrow -0,3^n > -0,01 \Leftrightarrow 0,3^n < 0,01$

La calculatrice indique que $0,3^3 = 0,027$ et $0,3^4 = 0,0081$. L'entier n cherché est donc $n = 4$.

3) Algorithme qui affiche en sortie cette valeur de n :

```
VARIABLES
p, n.
INITIALISATION
p prend la valeur 0
n prend la valeur 0
TRAITEMENT
Tant que p ≤ 0,99
n prend la valeur n + 1
p prend la valeur 1 – 0,3^n
SORTIE
Afficher n
```