Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)\mathrm{e}^{-x}$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2\mathrm{e}^{2x}$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x + \mathrm{e}^{-x}$

4. Soit $a > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} - ax$

5. Soit $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} - ax$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{x}}$

7. $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{5x}$

Correction page suivante

Correction

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{e^x} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = F.I.$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}$

On sait que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

On a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x} = 0 - \dfrac{1}{+\infty} = 0$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{2x} = +\infty \times 0 = F.I.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x)^2$

On sait que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0}$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x)^2 = \lim\limits_{X \to 0} X^2 = 0$

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x + e^{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x + \dfrac{1}{e^x} = -\infty + \dfrac{1}{0^+} = -\infty + \infty = F.I.$ $\quad 0^+$ car $e^x > 0$ pour tout réel x.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x + e^{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x + \dfrac{1}{e^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{xe^x + 1}{e^x} = \dfrac{0+1}{+\infty} = 0$ $\quad$ car on sait que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0}$

4. Soit $a > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - ax$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - ax = 0 + \infty = +\infty$

5. Soit $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - ax$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - ax = +\infty - \infty = F.I.$

On sait que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty}$ $\quad$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - ax = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x} - a\right) = +\infty(+\infty - a) = +\infty$

6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = F.I.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} \times \sqrt{x}$

On sait que $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty}$ $\quad$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} \times \sqrt{x} = +\infty(+\infty) = +\infty$

7. $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{5x} = -\infty \times 0 = F.I.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{5x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{5} \times 5xe^{5x} = \lim\limits_{X \to -\infty} \dfrac{1}{5} \,.\, X \,.\, e^X = \dfrac{1}{5} \times 0 = 0$ $\quad$ car on sait que $\boxed{\lim\limits_{X \to -\infty} X \,.\, e^X = 0}$

(après avoir posé : $X = 5x$)