Exercice 1

A$(3\ ;\ -1\ ;\ 4)$, B$(-1\ ;\ 2\ ;\ -3)$, C$(4\ ;\ -1\ ;\ 2)$ et Δ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+4t \\ y &=& 4-t \\ z &=& -8+2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

La droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(4\,;\,-1\,;\,2)$.

La droite (AC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\text{AC}}\,(1\,;\,0\,;\,-2)$.

On a : $xx' + yy' + zz' = 4 \times 1 + (-1) \times 0 + 2 \times (-2) = 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont orthogonaux ; on peut en déduire que les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

Affirmation 1 : Vraie

Affirmation 2 : Les points A, B et C déterminent un plan.

Les points A, B et C déterminent un plan si et seulement s'ils ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{\text{AB}}$ a pour coordonnées $(-4\,;\,3\,;\,-7)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ a pour coordonnées $(1\,;\,0\,;\,-2)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés ; ils déterminent donc le plan (ABC).

Affirmation 2 : Vraie

Exercice 2

$A\,(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et $B\,(-2\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+t \\ y &=& 1+t \\ z &=& -1-t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. $\overrightarrow{AB}\,(-2\,;\,1\,;\,0)$. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2k \\ y &=& 1+k \\ z &=& -1 \end{array}\right.$ où $k \in \mathbb{R}$

2. **a.** La droite (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\,(-2\,;\,1\,;\,0)$.

La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(1\,;\,1\,;\,-1)$.

Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires ($\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{v}$ avec $k \in \mathbb{R}$) donc les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.

b. Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont sécantes si elles admettent un point d'intersection, autrement dit s'il existe un réel t et un réel k tels que : $\left\{\begin{array}{rcl} -2+t &=& -2k \\ 1+t &=& 1+k \\ -1-t &=& -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2 &=& -2k \\ k &=& 0 \\ t &=& 0 \end{array}\right.$

$k = 0$ ne vérifie pas la première équation donc ce système n'a pas de solution.

Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas sécantes.

Les deux droites n'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires.

Exercice 3

$A(1\ ;\ 1;\ 0),\ B(3\ ;0\ ;\ -1)$ et $C(7\ ;1\ ;\ -2)$ et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -5+3t \end{cases}$

Proposition 1 : Vraie

Il suffit de vérifier que les coordonnées des deux points A et B vérifient le système formé des trois équations paramétriques.

Pour $t = 2$ on retrouve les coordonnées du point A, et pour $t = 1$ celles du point B.

Proposition 2 : Vraie

$\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(2,\ 1,\ 3)$ et (AB) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(-2,\ 1,\ 1)$.

Or $xx' + yy' + zz' = -4 + 1 + 3 = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont donc orthogonaux, les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont donc orthogonales.

Proposition 3 : Fausse

Pour savoir si ces deux droites sont coplanaires, il suffit de savoir si elles sont sécantes, car étant orthogonales elles ne sont pas parallèles.

Pour cela on résout le système : $\begin{cases} -2t = 5 - t' \\ 1+t = -1+t' \\ -5+3t = -2+t' \end{cases} \iff \begin{cases} 2t+2t' = 5 \quad (1) \\ t-t' = -2 \quad (2) \\ 3t-t' = 3 \quad (3) \end{cases}$

On commence par résoudre le système composé des équations (2) et (3) :

En soustrayant membre à membre (3) et (2), il vient $2t - 6 = -1$ soit $t = \dfrac{5}{2}$.

On remplace dans (2) : $t' = -2 + t = -2 + \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Les valeurs trouvées pour t et t' vérifient-elles l'équation (1) ?

On a : $2t = 5$, alors que $5 - 2t' = 5 - 1 = 4$ donc non, les valeurs trouvées ne vérifient pas l'équation (1), ce qui signifie que ce système n'a pas de solution.

Puisque ces deux droites sont orthogonales et non sécantes, elles sont donc non coplanaires.

Exercice 4

A(1 ; 2 ; 7), B(2 ; 0 ; 2), C(3 ; 1 ; 3), D(3 ; −6 ; 1) et E(4 ; −8 ; −4)

1. On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ (1\,;-2\,;-5)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ (2\,;-1\,;-4)$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. $\overrightarrow{u}(1\ ;\ b\ ;\ c)$ est un vecteur normal au plan (ABC) s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan, par exemple $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, on a : $xx'+yy'+zz'=1-2b-5c$, donc $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{AB}$ si $1-2b-5c=0$

Pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, on a : $xx'+yy'+zz'=2-b-4c$, donc $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{AC}$ si $2-b-4c=0$

Il faut donc résoudre le système : $\begin{cases} 1-2b-5c &= 0 \\ 2-b-4c &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2b-5c &= -1 \quad (1) \\ b+4c &= 2 \quad (2) \end{cases}$

On peut résoudre le système par substitution :

De (2) on déduit : $b=2-4c$

On substitue dans (1) : on a : $-2(2-4c)-5c=-1$ soit $-4+8c-5c=-1$ et donc $3c=3$ d'où $c=1$

On déduit ensuite b : $b=2-4c=-2$.

Conclusion : $b=-2$, $c=1$ et $\overrightarrow{u}(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$

3. La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w}(2\ ;\ -4\ ;\ 2)$. On a $\overrightarrow{w}=2\overrightarrow{u}$ donc le vecteur $\overrightarrow{w}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$.

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ étant normal au plan (ABC), on en déduit que $\overrightarrow{w}$ est lui aussi normal au plan (ABC).

Exercice 5

$A(5\ ;\ -5\ ;\ 2)$, $B(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$, et $D(6\ ;\ 6\ ;\ -1)$

1. Nature du triangle BCD :

$$\begin{cases} BC^2=(0-(-1))^2+(1-1)^2+(2-0)^2=5 \\ CD^2=(6-0)^2+(6-1)^2+(-1-2)^2=70 \\ BD^2=(6-(-1))^2+(6-1)^2+(-1-0)^2=75 \end{cases} \Longrightarrow BD^2=BC^2+CD^2 \Longrightarrow BCD \text{ est rectangle en } C$$

2. Son aire est : $\dfrac{BC\times CD}{2}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{70}}{2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{14}$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{n}\ (-2\,;3\,;1)$ est normal au plan (BCD) si $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{CD}$ (deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD).

$\overrightarrow{BC}\ (1\,;0\,;2)$ et $\overrightarrow{CD}\ (6\,;5\,;-3)$

Pour $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, on a : $xx'+yy'+zz'=-2+0+2=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{BC}$.

Pour $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, on a : $xx'+yy'+zz'=-12+15-3=0$ donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{CD}$.

4. Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) (donc de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$) et passant par le point A est

$$\begin{cases} x=5-2t \\ y=-5+3t \\ z=2+t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

5. H appartient au plan (BCD) donc il suffit de vérifier qu'il appartient aussi à la droite $\mathcal{D}$.

H a pour coordonnées $(1\ ;\ 1\ ;\ 4)$, ses coordonnées vérifient la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ pour la valeur $t = 2$ donc $H \in \mathcal{D}$.

6. Volume du tétraèdre $ABCD$:

$[AH]$ est la hauteur du tétraèdre, car A est sur la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (BCD) et H est l'intersection de $\mathcal{D}$ et (BCD), donc H est la projection orthogonale de A sur (BCD).

On a : $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h la hauteur correspondante.

$\mathcal{B} = 5\sqrt{7}$

$h = AH = \sqrt{(5-1)^2 + (-5-1)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{14}$

donc :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{14} \times \frac{5}{2}\sqrt{14} = \frac{70}{3}$$