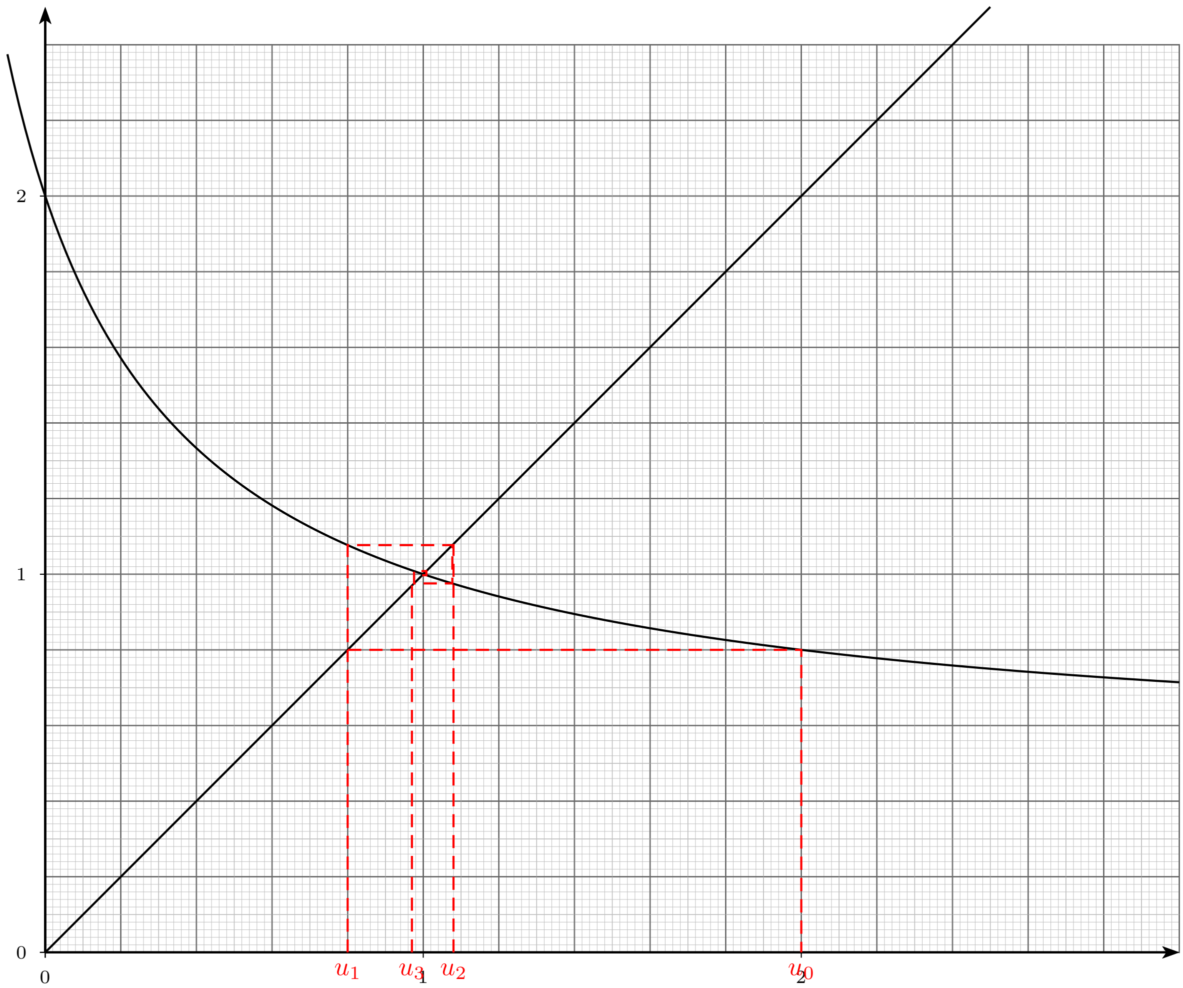
BAC BLANC TS maths, exercice 1.

$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1}$. On admet que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.



1. **a.**

b. La suite ne semble pas monotone et parait converger vers une solution de l'équation $\dfrac{x+2}{2x+1} = x$

2. **a.** Partant de $u_0 = 2$ on calcule successivement

- $u_1 = \dfrac{2+2}{2 \times 2 + 1} = \dfrac{4}{5} = 0,8$
- $u_2 = \dfrac{\frac{4}{5} + 2}{2 \times \frac{4}{5} + 1} = \dfrac{\frac{14}{5}}{\frac{13}{5}} = \dfrac{14}{13} \approx 1,0769$
- $u_3 = \dfrac{\dfrac{14}{13} + 2}{2 \times \dfrac{14}{13} + 1} = \dfrac{\dfrac{40}{13}}{\dfrac{41}{13}} = \dfrac{40}{41} \approx 0,9756$
- $u_4 = \dfrac{\dfrac{40}{41} + 2}{2 \times \dfrac{40}{41} + 1} = \dfrac{\dfrac{122}{41}}{\dfrac{121}{41}} = \dfrac{122}{121} \approx 1,0083$

b.

- D'une part $u_0 - 1 = 1$, d'autre part $(-1)^0 = 1$
- D'une part $u_1 - 1 = -1/5$, d'autre part $(-1)^1 = -1$
- D'une part $u_2 - 1 = 1/13$, d'autre part $(-1)^2 = 1$
- D'une part $u_3 - 1 = -1/41$, d'autre part $(-1)^3 = -1$
- D'une part $u_4 - 1 = 1/121$, d'autre part $(-1)^4 = 1$

On constate qu'à chaque fois, $u_n - 1$ et $(-1)^n$ ont le même signe.

c. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1 = \dfrac{u_n + 2 - 1(2u_n + 1)}{2u_n + 1} \dfrac{u_n + 2 - 2u_n - 1}{2u_n + 1} = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$

d.

- *Initialisation :* Déjà vérifié pour $n = 0$
- *Hérédité :* Si pour un entier $n \geqslant 0$ on suppose que $u_n - 1$ et $(-1)^n$ ont le même signe alors peut-on en déduire que $u_{n+1} - 1$ et $(-1)^{n+1}$ ont aussi le même signe ?
  — D'après la question précédente $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1} = \dfrac{-(u_n - 1)}{2u_n + 1}$.
  On a admis que u_n est positif donc $2u_n + 1$ l'est aussi
  $u_{n+1} - 1$ est donc du signe opposé à $u_n - 1$
  — $(-1)^{n+1} = -1 \times (-1)^n$ est du signe opposé à $(-1)^n$
  — Ainsi si $u_n - 1$ et $(-1)^n$ ont le même signe alors $u_{n+1} - 1$ et $(-1)^{n+1}$ aussi

  L'affirmation est donc héréditaire
- *Conclusion* : L'affirmation est vraie au rang 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

3. $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \dfrac{\dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}}{\dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1} = \dfrac{\dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}}{\dfrac{u_n + 2 + 1(2u_n + 1)}{2u_n + 1}} = \dfrac{\dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}}{\dfrac{3u_n + 3}{2u_n + 1}} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$

b. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{-(u_n - 1)}{3(u_n + 1)} = -\dfrac{1}{3}\, v_n$ donc la suite (v_n) est une géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{3}$.

$v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{2 - 1}{2 + 1} = \dfrac{1}{3}$ et $v_n = v_0 \times q^n = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

c. De $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ on déduit successivement :

$v_n(u_n + 1) = u_n - 1$,

$v_n\, u_n + v_n = u_n - 1$,

$v_n\, u_n - u_n = -v_n - 1$,

$u_n(v_n - 1) = -v_n - 1$,

et $v_n - 1$ étant différent de 0 (v_n ne pouvant être égal à 1), on en déduit : $u_n = \dfrac{-v_n - 1}{v_n - 1} = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$

Comme toute suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1, (v_n) tend vers 0 donc (u_n) tend vers $\dfrac{1 + 0}{1 - 0} = 1$