

OBLIGATOIRE

Durée : 4h

Calculatrice autorisée.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 _____ Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité _____ 5 points

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

1. a. On donne en annexe la représentation graphique de la fonction f définie sur $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ par

$$f(x) = \frac{x + 1}{2x + 1}$$

Sur l'annexe, sans calcul, construire sur l'axe des abscisses les premiers termes u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 de la suite (u_n) .

Laisser apparents les traits de construction.

- b. Emettre une conjecture concernant les variations de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.
2. a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 . On donnera les résultats sous forme fractionnaire et décimale arrondie à 10^{-4} .
- b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
- c. Établir que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - 1 = \frac{-(u_n - 1)}{2u_n + 1}$$

- d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.
3. Pour tout entier naturel n , on pose

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

- a. Établir que pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$$

- b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n .

- c. Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Numéro de candidat :

Annexe à rendre avec la copie

Annexe de l'exercice 1

