Exercice 3 | Suites + Algorithme

$u_0 = \frac{1}{3}$

$u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$

1) $u_1 = 2u_0(1-u_0) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right) = \boxed{\frac{4}{9}}$

$u_2 = 2u_1(1-u_1) = \frac{8}{9}\left(1-\frac{4}{9}\right) = \frac{8}{9}\left(\frac{5}{9}\right) = \boxed{\frac{40}{81}}$

2a) On note $P(n)$: $0 < u_n < \frac{1}{2}$

- $u_0 = \frac{1}{3}$ donc $0 < u_0 < \frac{1}{2}$ donc $P(0)$ est vraie
- Montrons que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie

Hyp : $0 < u_n < \frac{1}{2}$

Montrons que $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$

On a $0 < u_n < \frac{1}{2}$

donc $0 < 2u_n < 1$

$0 < u_n < \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} < -u_n < 0$

$\frac{1}{2} < 1-u_n < 1$

On peut multiplier membre à membre deux inégalités si tous les termes sont positifs

donc $0 \times \frac{1}{2} < 2u_n(1-u_n) < 1 \times 1$

$0 < 2u_n(1-u_n) < 1$

$0 < u_{n+1} < 1$

on a donc $\boxed{0 < u_{n+1}}$

Il reste à montrer que $u_{n+1} < \frac{1}{2}$

Pour cela on va montrer que $u_{n+1} - \frac{1}{2} < 0$.

On a $u_{n+1} - \frac{1}{2} = 2u_n(1-u_n) - \frac{1}{2}$

$= 2u_n - 2u_n^2 - \frac{1}{2}$

$= -2u_n^2 + 2u_n - \frac{1}{2}$

On pose $\boxed{X = u_n}$

$-2X^2 + 2X - \frac{1}{2} = 0$

$\Delta = 4 - 4\times(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Delta = 4 - 4 = 0.$

1 seule racine $X = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-4}$

$X = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$-2x^2+2x-\frac{1}{2}$	$-$	0	$-$

Or $0 < u_n < \frac{1}{2}$ par hypothèse.
et sur $]0, \frac{1}{2}[$ $\quad -2x^2+2x-\frac{1}{2} < 0$

donc $-2u_n^2 + 2u_n - \frac{1}{2} < 0$

donc $u_{n+1} - \frac{1}{2} < 0$.

càd $\boxed{u_{n+1} < \frac{1}{2}}$

On a donc montré que $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$ càd $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \geq 0$.

b) Montrons que $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \geq 0$

On a $u_{n+1} - u_n = 2u_n(1-u_n) - u_n$

$= u_n(2 - 2u_n - 1)$

$= \underbrace{u_n}_{\oplus} \underbrace{(1 - 2u_n)}_{\oplus}$

$\oplus$ car $u_n < \frac{1}{2}$
donc $2u_n < 1$
et $0 < 1 - 2u_n$.

donc $u_{n+1} - u_n > 0$

donc $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \geq 0$.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée (par $\frac{1}{2}$) donc elle converge.
On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

On a $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} 2u_n(1-u_n)$

$\ell = 2\ell(1-\ell)$

$\ell = 2\ell - 2\ell^2$

$2\ell^2 - \ell = 0$

$\ell(2\ell - 1) = 0$

$\ell = 0$ ou $\ell = \frac{1}{2}$

Comme $(u_n) \nearrow$ avec $u_0 = \frac{1}{3}$, $\ell = 0$ est impossible

donc $\boxed{\ell = \frac{1}{2}}$

3) $v_n = 1 - 2u_n$

a) $v_{n+1} = 1 - 2u_{n+1} = 1 - 2(2u_n(1-u_n))$

$= 1 - 4u_n(1-u_n) = 1 - 4u_n + 4u_n^2$

$v_n^2 = (1-2u_n)^2 = 1 - 4u_n + 4u_n^2$

donc $\boxed{v_{n+1} = v_n^2}$

b)

$v_1 = v_0^2$

$v_2 = v_1^2 = (v_0^2)^2 = v_0^4 = v_0^{2^2}$

$v_3 = v_2^2 = (v_0^4)^2 = v_0^8 = v_0^{2^3}$

Rmq :
$2^1 = 2$
$2^2 = 4$
$2^3 = 8$

Conjecture

$\boxed{v_n = v_0^{2^n}}$ avec $v_0 = 1 - 2u_0 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

donc $\boxed{v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}}$

A montrer par récurrence : pour $n \geq 0$

- pour $n = 0$ $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2^0} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$

donc $\mathcal{P}(0)$ vraie

- Hyp. $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$

Montrons que $v_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}$

On a $v_{n+1} = v_n^2 = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n \times 2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}}$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion $\mathcal{P}(n)$ vraie pour tout $n \geq 0$.

donc $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$ pour $n \geq 0$.

et $1 - 2u_n = v_n$

$-2u_n = v_n - 1$

$u_n = \frac{v_n - 1}{-2} = \frac{1 - v_n}{2}$

donc $\boxed{u_n = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}\right)}$

4) a) Algorithme : pour $n = 3$.

u	4	-24	-1200.	$\boxed{-2\,882\,400.}$
n	3			
k		1	2	3

Afficher $\boxed{-2\,882\,400.}$

b) Donner à n la valeur 0
Donner à u la valeur $\frac{1}{3}$
tant que $u < 0{,}5 - 10^{-100}$
Donner à u la valeur $2u(1-u)$
Donner à n la valeur $n+1$
Fin du tant que
Afficher n.