

Exercice 1 4 points

On considère la suite numérique (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$ pour tout $n \geq 0$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2.
 - a. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$, $0 < u_n < \frac{1}{2}$.
 - b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 - c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par : $v_n = 1 - 2u_n$
 - a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $v_{n+1} = v_n^2$.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n .

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.