$\boxed{\text{Ex 4}}$

Polynésie Sept 2010 :

$g(x) = e^x - x e^x + 1$ pour $x \geq 0$

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty - \infty + 1$ [FI]

$= \lim\limits_{x \to +\infty} e^x(1-x) + 1$

$= +\infty(-\infty) + 1 = \boxed{-\infty}$

2) Variation de g :

$g'(x) = e^x - (e^x + x e^x) = \cancel{e^x} - \cancel{e^x} - x e^x = \boxed{-x e^x}$

$x \geq 0$ et $e^x \geq 0$ donc $g'(x) \leq 0$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	2 ↘	0 ↘	$-\infty$

$g(0) = 1 - 0 + 1 = 2$

4a) Sur $[0,+\infty[$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante. Donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires et le tableau de variation, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution sur $[0,+\infty[$ que l'on note α.

b) D'après la calculatrice $\boxed{1{,}27 < \alpha < 1{,}28}$

car $g(1{,}27) > 0$ et $g(1{,}28) < 0$.

c) Démontrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

On a $g(\alpha) = 0$ donc $e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0$

$e^\alpha(1-\alpha) + 1 = 0$

$e^\alpha = \dfrac{-1}{1-\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$

5) Signe de $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Polyn. Sept 2010.

$\boxed{2}$ $A(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$ sur $[0,+\infty[$.

1) $A'(x) = \dfrac{4(e^x+1) - 4x(e^x)}{e^x + 1} = \dfrac{4e^x + 4 - 4xe^x}{e^x + 1}$

$= \dfrac{4(e^x + 1 - xe^x)}{e^x + 1}$

$= \dfrac{4\,g(x)}{e^x + 1}$

pour tout x réel :

$e^x > 0$ donc $e^x + 1 > 0$

donc $A'(x)$ est du signe de $g(x)$

donc :

x	0		α		$+\infty$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$		↗		↘	

$\boxed{3}$ $f(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$ $M(x ; f(x))$ $P(x ; 0)$ $Q(0 ; f(x))$

1) Aire du rectangle OPMQ :

$\mathcal{A}(OPMQ) = OP \times OQ = x \times f(x)$ car $x > 0$ et $f(x) > 0$.

$= \dfrac{4x}{e^x + 1} = A(x)$

Donc l'aire $A(x)$ est maximale pour $x = \alpha$.

NON

b) Montrer que l'aire maximale est égale à : $4(\alpha - 1)$

Aire maximale : $A(\alpha) = \dfrac{4\alpha}{e^\alpha + 1}$

or $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ donc $e^\alpha + 1 = \dfrac{1}{\alpha - 1} + 1 = \dfrac{1 + \alpha - 1}{\alpha - 1} = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$

et $A(\alpha) = \dfrac{4\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha - 1}} = 4\alpha \times \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} = \boxed{4(\alpha - 1)}$

2) <u>Coeff. directeur de la tangente en $M(\alpha, f(\alpha))$: $f'(\alpha)$</u>

$f(x) = \frac{4}{e^x+1} = 4 \times \frac{1}{e^x+1}$

$f'(x) = 4 \times \frac{-e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{-4e^x}{(e^x+1)^2}$

donc $\boxed{f'(\alpha) = \frac{-4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2}}$

<u>Coeff. directeur de (PQ) :</u> $P(\alpha ; 0)$ $Q(0, f(\alpha))$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} : \frac{f(\alpha)-0}{0-\alpha} = \frac{f(\alpha)}{-\alpha} = \boxed{\frac{-f(\alpha)}{\alpha}}$

<u>les droites sont parallèles si elles ont même coefficient directeur.</u>

A-t-on $f'(\alpha) = \frac{-f(\alpha)}{\alpha}$?

On a : $\frac{-f(\alpha)}{\alpha} = \frac{-\frac{4}{e^\alpha+1}}{\alpha} = -\frac{4}{e^\alpha+1} \times \frac{1}{\alpha}$

$= \boxed{\frac{-4}{\alpha(e^\alpha+1)}}$

et $f'(\alpha) = \frac{-4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2} = \frac{-4}{e^\alpha+1} \times \frac{e^\alpha}{e^\alpha+1}$

$= \boxed{\frac{-4}{\alpha(e^\alpha+1)} \times \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}}$

Donc : $f'(\alpha) = -\frac{f(\alpha)}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1} = 1$

<u>A-t-on</u> $\frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1} = 1$?

on sait que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$ donc $\frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1} = \frac{\alpha \times \frac{1}{\alpha-1}}{\frac{1}{\alpha-1}+1} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}}{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$

$= \frac{\alpha}{\alpha-1} \times \frac{\alpha-1}{\alpha} = 1$

donc <u>oui</u> $\frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1} = 1$

et donc <u>oui</u> la tangente est parallèle à la droite (PQ)