

Partie 1 : Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g puis donner le tableau de variations de g .
3.
 - a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0 ; +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.
 - b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
 - c. Démontrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie 2 : Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ telle que $A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0 ; +\infty[$.

Partie 3 : On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$.

On note (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . La figure est donnée en annexe.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de (\mathcal{C}) de coordonnées $(x ; f(x))$,

P le point de coordonnées $(x ; 0)$,

Q le point de coordonnées $(0 ; f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α .

On rappelle que le réel α a été défini dans la partie 1.

2. Le point M a pour abscisse α . La tangente (T) en M à la courbe (\mathcal{C}) est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

