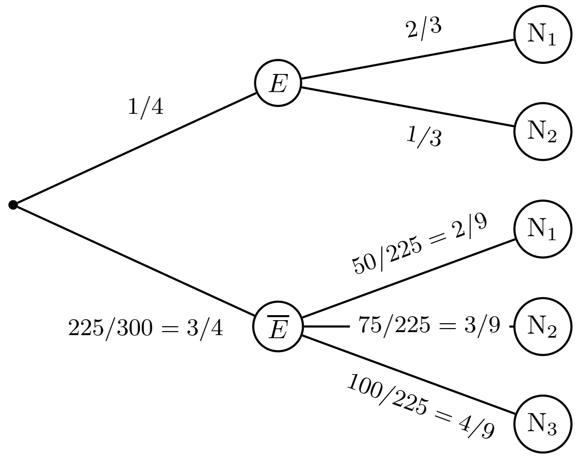
Exercice 2 **Probabilité** .... 5 points

300 personnes interrogées dans un immeuble :

- 225 utilisent l'ascenseur. Parmi elles, 50 vont au 1$^{\text{er}}$, 75 vont au 2$^{\text{e}}$, 100 vont au 3$^{\text{e}}$.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi elles, un tiers va au 2$^{\text{e}}$ niveau, les autres vont au 1$^{\text{er}}$ niveau.

1. 

2. (a) P(« la personne va au 2$^{\text{e}}$ niveau par l'escalier») $= P(\mathrm{E} \cap \mathrm{N}_2) = P(\mathrm{E}) \times P_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_2) = \dfrac{75}{300} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$.

   (b) L'arbre permet de dire que

   - $P(\mathrm{N}_1) = \dfrac{50}{300} + \dfrac{75}{300} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3}$
   - $P(\mathrm{N}_2) = \dfrac{75}{300} + \dfrac{75}{300} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3}$
   - $P(\mathrm{N}_3) = \dfrac{100}{300} = \dfrac{1}{3}$

   Les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

   (c) La probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2$^{\text{e}}$ niveau est
   $P_{\mathrm{N}_2}(\mathrm{E}) = \dfrac{P(\mathrm{E} \cap \mathrm{N}_2)}{P(\mathrm{N}_2)} = \dfrac{1/12}{1/3} = \dfrac{1}{12} \times \dfrac{3}{1} = \dfrac{1}{4}$

3. On interroge 20 personnes de cette population , X est le nombre de ces personnes allant au 2$^{\text{e}}$ niveau.

   (a) X compte le nombre de «succès» dans la répétition de 20 expériences identiques et indépendantes, la probabilité du succès de chaque expérience est $1/3$.

   Donc X suit la loi binomiale $B(20\,; 1/3)$

   (b) Avec la calculatrice $P(X = 5) = \mathrm{BinomialPD}(5, 20, 1/3) \approx 0,1457$

   (c) L'espérance d'une variable de loi binomiale $B(n, p)$ est np donc en moyenne, sur les 20 personnes, $\dfrac{20}{3} \approx 7$ vont au 2$^{\text{e}}$ niveau.

4. On interroge $n \leqslant 300$ personnes, on suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres. X suit maintenant la loi $B(n, 1/3)$

   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 1/3)^n = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

   $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99 \iff 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \iff 100 \leqslant \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

   $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ définit une suite croissante, on trouve avec la calculatrice qu'elle dépasse 100 à partir de $n = 12$:

   $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{11} \approx 86$ et $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{12} \approx 130$

   Conclusion : $n = 12$ est le plus petit entier tel que la probabilité de l'évènement « au moins un personne va au 2$^{\text{e}}$ niveau »soit supérieure ou égale à $0,99$.