Nombres complexes - Ensemble de points

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble donné.

Objectif : montrer qu'un ensemble de points M vérifiant une condition est l'ensemble $\mathcal{E}$.

Méthode 1 : On procède par équivalences :

M vérifie la condition

$\Longleftrightarrow \dots$

$\Longleftrightarrow M \in \mathcal{E}$

Méthode 2 : On fait la preuve en deux étapes :

1. Soit M vérifiant la condition, on montre que $M \in \mathcal{E}$
2. Soit $M \in \mathcal{E}$, on montre que M vérifie la condition.

Exercice 1

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.

a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est $x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y)$

b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v})$.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z}{|z|}\left(2 - |z|\right).$$

On note $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Déterminer l'ensemble E des points M du plan privé du point O dont l'image par f est O.

2. Montrer que le cercle $\mathcal{C}_1$ est l'ensemble des points M du plan distincts de O tels que $f(M) = M$.

Correction pages suivantes

Exercice 1

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

On a : $|f(z) - 8| = 3 \iff \left|z^2 + 2z + 9 - 8\right| = 3$

$\iff \left|z^2 + 2z + 1\right| = 3$

$\iff \left|(z+1)^2\right| = 3$

$\iff |z+1|^2 = 3$ car le module d'un carré est égal au carré du module.

$\iff |z+1| = \sqrt{3}$

$\iff |z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$

$\iff \Omega M = \sqrt{3}$

Conclusion : l'ensemble F des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z) - 8| = 3$ est l'ensemble des points M tels que $\Omega M = \sqrt{3}$ c'est donc le cercle de centre Ω de rayon $\sqrt{3}$

2. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.

a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est $x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y)$

On a :

$f(z) = z^2 + 2z + 9$

$f(z) = (x + \mathrm{i}y)^2 + 2(x + \mathrm{i}y) + 9$

$f(z) = x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + 2x + 2\mathrm{i}y + 9$

$f(z) = x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y)$

b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.

Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

$f(z)$ réel $\iff 2xy + 2y = 0$

$\iff 2y(x+1) = 0$

$\iff y = 0$ ou $x = -1$

Donc l'ensemble des points tels que $f(z)$ est réel est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $y = 0$ ou $x = -1$, c'est donc la réunion des droites D_1 d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et D_2 d'équation $x = -1$.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{z}{|z|}(2 - |z|).$$

On note $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Déterminer l'ensemble E des points M du plan privé du point O dont l'image par f est O.

On a : $f(M) = 0 \iff z' = 0$

$$\iff \frac{z}{|z|}(2 - |z|) = 0$$
$$\iff \frac{z}{|z|} = 0 \text{ ou } (2 - |z|) = 0$$

Or $z \neq 0$ donc

$$f(M) = 0 \iff (2 - |z|) = 0$$
$$\iff |z| = 2$$
$$\iff OM = 2$$

Conclusion : l'ensemble E des points M qui ont pour image par f est O est l'ensemble des points M tels que $OM = 2$

c'est donc le cercle de centre O de rayon 2

2. Montrer que le cercle $\mathcal{C}_1$ est l'ensemble des points M du plan distincts de O tels que $f(M) = M$.

Avec la méthode 2 :

Étape 1 : soit M appartenant à $\mathcal{C}_1$, on a $OM = 1$ donc $|z| = 1$.

On en déduit que $z' = \frac{z}{|z|}(2 - |z|) = \frac{z}{1}(2 - 1) = z$

On a donc montré que $z' = z$ c'est-à-dire $f(M) = M$.

Étape 2 : Soit M tel que $f(M) = M$ c'est-à-dire $z' = z$.

On a donc $\frac{z}{|z|}(2 - |z|) = z$

donc $z(2 - |z|) = z|z|$

donc $2z - z|z| = z|z|$

donc $2z - 2z|z| = 0$

donc $2z(1 - |z|) = 0$

or $z \neq 0$ donc $1 - |z| = 0$

et donc $|z| = 1$

c'est-à-dire $OM = 1$ et donc M appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

Remarque : on peut appliquer la méthode 1 en partant de $f(M) = M$ pour arriver à $OM = 1$