Fonctions sinus et cosinus

I. Calculs de limite en $+\infty$ et $-\infty$.

Méthode : les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en $+\infty$ et $-\infty$.

Pour déterminer les limites, on utilise :

- les encadrements $\boxed{-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1}$ et $\boxed{-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1}$ valables pour tout réel x

- et le théorème de comparaison ou le théorème des gendarmes.

Rappels de certaines propriétés des fonctions sinus et cosinus :

$\cos(-x) = \cos x$ $\quad$ $\sin'(x) = \cos x$ $\quad$ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\sin(-x) = -\sin x$ $\quad$ $\cos'(x) = -\sin(x)$

Exercice 1 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x + x$

II. Calcul de dérivées :

Exercice 2 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ $\quad$ $f(x) = x \sin x$
2. Pour $x \in \left]\dfrac{-\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$ $\quad$ $g(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
3. Pour $x \in \mathbb{R}$ $\quad$ $h(x) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{5}\right)$
4. Pour $x \in \mathbb{R}$ $\quad$ $p(x) = (1 + \cos x)^2$

III. Etudes des variations d'une fonction

Exercice 3

Soit $\quad f(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) \quad$ sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{6}\right]$

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{6}\right]$.
2. Si $x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{6}\right]$, à quel intervalle appartient $3x + \dfrac{\pi}{3}$?
3. En déduire les variations de f sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{6}\right]$
4. Résoudre $f(x) = 0$ sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{6}\right]$
5. Donner le tableau de signe de $f(x)$ sur $\left[0 ; \dfrac{\pi}{6}\right]$.

Exercice 4 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit $\quad f(x) = 2x + \sin x \quad$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f(-x) = -f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
2. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 5 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit $f(x) = \sin x - x\cos x$ sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$.

1. Calculer $f(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0\,;\,2\pi]$.

2. Déterminer les variations de f sur $[0\,;\,2\pi]$

Voir solutions sur les pages suivantes

Solutions

I. Calculs de limite en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

Pour tout réel x, on a : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

Pour $x > 0$, on a donc : $\dfrac{-1}{x} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$

Remarque : on considère $x > 0$ car la limite se calcule en $+\infty$ et il ne faut pas avoir $x = 0$ pour pouvoir diviser par x.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x + x$

Pour tout réel x, on a : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

et donc : $-1 + x \leqslant \cos x + x \leqslant 1 + x$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} -1 + x = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x + x = +\infty}$

II. Calcul de dérivées :

Exercice 2

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x\sin x$ $\quad$ Formule : uv

$f'(x) = 1 \times \sin x + x \times \cos x$

$\boxed{f'(x) = \sin x + x\cos x}$

2. Pour $x \in \left]\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ $\quad g(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad$ Formule : $\dfrac{u}{v}$

$g'(x) = \dfrac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$g'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$ $\quad$ car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\boxed{g'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ $\quad h(x) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{5}\right)$ $\quad$ Formule : $\sin u$ $\quad (\sin u)' = \cos u \times u' = u' \cos u$

$\boxed{h'(x) = 3\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{5}\right)}$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$ $\quad p(x) = (1 + \cos x)^2$ $\quad$ Formule : u^2 $\quad (u^2)' = 2uu'$

$p'(x) = 2\,(1 + \cos x) \times (-\sin x)$

$\boxed{p'(x) = -2\sin x\,(1 + \cos x)}$

III. Etudes des variations d'une fonction

Exercice 3 Soit $f(x) = \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ sur $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{6}\right]$

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \left[0\ ;\dfrac{\pi}{6}\right]$.

$f'(x) = -\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) \times 3$

Formule : $\cos u \qquad (\cos u)' = -\sin u \times u' = -u' \sin u$

$\boxed{f'(x) = -3\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right)}$

2. Si $x \in \left[0\ ;\dfrac{\pi}{6}\right]$, à quel intervalle appartient $3x + \dfrac{\pi}{3}$?

On a : $\quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6}$

donc $\quad 0 \leqslant 3x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

donc $\quad \dfrac{\pi}{3} \leqslant 3x + \dfrac{\pi}{3} \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}$

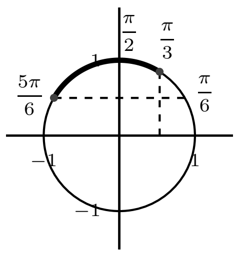
donc $\quad \dfrac{\pi}{3} \leqslant 3x + \dfrac{\pi}{3} \leqslant \dfrac{5\pi}{6}$

donc $\quad \boxed{3x + \dfrac{\pi}{3} \in \left[\dfrac{\pi}{3}\ ;\dfrac{5\pi}{6}\right]}$

3. En déduire les variations de f sur $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{6}\right]$

On a : $\quad f'(x) = -3\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) \qquad$ avec $\quad 3x + \dfrac{\pi}{3} \in \left[\dfrac{\pi}{3}\ ;\dfrac{5\pi}{6}\right]$

Avec un cercle trigonométrique, on voit que sur $\left[\dfrac{\pi}{3}\ ;\dfrac{5\pi}{6}\right]$ (arc colorié en noir), le sinus est positif.



donc si $\quad 3x + \dfrac{\pi}{3} \in \left[\dfrac{\pi}{3}\ ;\dfrac{5\pi}{6}\right] \quad$ on a $\quad \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) > 0$

et donc $\quad \boxed{f'(x) < 0} \quad$ sur $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{6}\right]$.

Conclusion : f est décroissante sur $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{6}\right]$

4. Résoudre $f(x) = 0$ sur $\left[0\ ;\dfrac{\pi}{6}\right]$

On a : $\quad \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0 \qquad$ avec $\quad 3x + \dfrac{\pi}{3} \in \left[\dfrac{\pi}{3}\ ;\dfrac{5\pi}{6}\right]$

$\Leftrightarrow 3x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} \qquad$ d'après le cercle trigonométrique précédent

$\Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{18} \qquad$ donc $f(x) = 0$ pour $x = \dfrac{\pi}{18}$

5. On sait que f est décroissante et s'annule en $\dfrac{\pi}{18}$, on peut donc donner le tableau de signes suivant :

x	0		$\dfrac{\pi}{18}$		$\dfrac{\pi}{6}$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 4 $\quad f(x) = 2x + \sin x \quad$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f(-x) = -f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

On a : $\quad f(-x) = -2x + \sin(-x) = -2x - \sin(x) = -f(x)$

On en déduit que la courbe de f est symétrique par rapport à l'origine. Pour s'en convaincre, considérer les points de la courbe de f, M d'abscisse x et P d'abscisse $-x$, on a alors $\quad y_P = f(-x) = -f(x) = -y_M$

2. Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2 + \cos x$

On a pour tout réel x : $\quad -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \quad$ donc $\quad 1 \leqslant 2 + \cos(x) \leqslant 3 \quad$ et donc $\quad f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

On a, pour tout réel x : $\quad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \quad$ donc $\quad -1+2x \leqslant \sin x+2x \leqslant 1+2x \quad$ c'est-à-dire $\quad -1+2x \leqslant f(x) \leqslant 1+2x$

On a : $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} -1 + 2x = +\infty \quad$ et d'après le théorème de comparaison, on en conclut que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

Exercice 5 $\quad$ Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\quad f(x) = \sin x - x\cos x \quad$ sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$.

1. Calculer $f(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

On a, pour tout réel x : $\quad f(-x) = \sin(-x) + x\cos(-x) = -\sin x + x\cos(x) = -(\sin x - x\cos x) = -f(x)$

On a, pour tout réel x : $\quad \boxed{f(-x) = -f(x)} \quad$ donc la courbe de f est symétrique par rapport à l'origine.

Pour s'en convaincre, considérer les points de la courbe de f, M d'abscisse x et P d'abscisse $-x$, on a alors $\quad y_P = f(-x) = -f(x) = -y_M$

Par conséquent, si on connait la courbe de f sur $[0\,;\,2\pi]$, on pourra en déduire la courbe sur $[-2\pi\,;\,2\pi]$ en traçant le symétrique par rapport à l'origine.

2. Déterminer les variations de f sur $[0\,;\,2\pi]$

On a : $\quad f'(x) = \cos x - (\cos x + x(-\sin x)) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x$

Sur $[0\,;\,2\pi]$, $x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\sin x$.

D'après le cercle trigonométrique, $\sin x$ est positif sur $[0\,;\,\pi]$ et négatif sur $[\pi\,;\,2\pi]$.

donc $\quad f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,\pi] \quad$ et $\quad f'(x) < 0$ sur $[\pi\,;\,2\pi]$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		π		2π
$f(x)$	0	$\nearrow$	π	$\searrow$	-2π