[A] Calcul d'aire / logo [Nov. 2014]

1)

$C_1 : f$

$C_2 : f'$

Variation de f $\Rightarrow$ Signe de f'

on a

x	$-\infty$	$\simeq 0,5$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

donc

x		$\simeq 0,5$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

donc seule possibilité <u>Situation 1</u>

Rmq : pour C_1 : tgte horizontale pour $x \simeq 0,5$ donc $f'(0,5) \simeq 0$ donc Situation 1

2) $A(0,2)$ $\quad y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f(0) = 2$

Avec graphique <u>Situation 1</u> : $f'(0) = 1$

donc $y = 1(x-0) + 2$

$$\boxed{y = x + 2}$$

3) $f(x) = e^{-x} + ax + b$

a) $*$ $f(0) = 2$ donc $e^0 + b = 2$
car $A(0,2) \in \mathcal{C}_f$ $\quad b = 2 - 1 = 1$ $\quad \boxed{b = 1}$

$*$ $f'(0) = 1$ et $f'(x) = -e^{-x} + a$

donc $-e^0 + a = 1$

$a = 1 + 1 = 2$ $\quad \boxed{a = 2}$

b) $\boxed{f(x) = e^{-x} + 2x + 1}$

$f'(x) = -e^{-x} + 2$

$f'(x) > 0 \iff -e^{-x} + 2 > 0$

$\iff -e^{-x} > -2$

$\iff e^{-x} < 2$ $\quad$) $\ln \nearrow$ sur $]0, +\infty[$

$\iff -x < \ln 2$

$\iff x > -\ln 2$

et $f'(x) = 0 \iff x = -\ln 2$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} + 2x + 1 = \frac{1}{+\infty} + \infty = \boxed{+\infty}$$

[B]

$g(x) = f(x) - (x+2)$ donc $g(x) = e^{-x} + 2x + 1 - x - 2$

$g(x) = e^{-x} + x - 1$

1a) $g'(x) = -e^{-x} + 1$

$g'(x) > 0 \iff -e^{-x} + 1 > 0$

$\iff -e^{-x} > -1$

$\iff e^{-x} < 1$ $\quad$) $\ln \nearrow$ sur $]0, +\infty[$

$\iff -x < \ln 1$

$\iff x > 0$

et $g'(x) = 0 \iff x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

b) Δ a pour équation $y = x + 2$

et $g(x) = f(x) - (x+2)$

le signe de $g(x)$ donne la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ

$g(0) = e^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$

donc $g(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$

donc $f(x) \geq x + 2$ sur $\mathbb{R}$

et donc $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de Δ

2)

$$\text{Aire} = \underbrace{\int_{-2}^{2} f(x)\,dx}_{\text{Aire sous la courbe } \mathcal{C}_1} - \underbrace{\int_{-2}^{2} x + 2\,dx}_{\text{aire sous la droite } \Delta}$$

car $f(x) \geq 0$ sur $[-2, 2]$ et $x + 2 \geq 0$ sur $[-2, 2]$

$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

$= \int_{-2}^{2} e^{-x} + 2x + 1\,dx$

$= \left[-e^{-x} + x^2 + x\right]_{-2}^{2}$

$= (-e^{-2} + 4 + 2) - (-e^{2} + 4 - 2)$

$= -e^{-2} + e^{2} + 4$

$\int_{-2}^{2} x + 2\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{2}$

$= \left(\frac{4}{2} + 4\right) - \left(\frac{4}{2} - 4\right)$

$= 8$

Aire $= -e^{-2} + e^{2} + 4 - (8)$

$$\boxed{\text{Aire} = e^{2} - e^{-2} - 4 \text{ U.A}}$$

$$\boxed{\text{Aire} \simeq 3,26 \text{ U.A}}$$