25/1/11 Suites

$u_0 = -1 \quad u_1 = \frac{1}{2} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n$

1) $u_2 = u_1 - \frac{1}{4} u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(-1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\left.\begin{array}{l} u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ u_1 - u_0 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \end{array}\right] \neq$ donc non arithmétique

$\left.\begin{array}{l} \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{3}{2} \\ \frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2} \end{array}\right] \neq$ donc non géométrique.

2) $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n$.

a) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2} u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times (-1) = 1$ $\boxed{v_0 = 1}$

b) $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2} u_{n+1}$

$= u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n - \frac{1}{2} u_{n+1}$

$= \frac{1}{2} u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n\right)$

$= \frac{1}{2} v_n$

donc $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n}$

c) donc (v_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$

d) $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3) $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

a) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$

$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2} u_n}{\frac{1}{2} v_n} = \frac{v_n}{\frac{1}{2} v_n} + \frac{\frac{1}{2} u_n}{\frac{1}{2} v_n}$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{u_n}{v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$.

donc $\boxed{w_{n+1} = 2 + \frac{u_n}{v_n}}$

donc $\boxed{w_{n+1} = 2 + w_n}$

25/1/11 Suites (2/2)

d) On a $w_{n+1} = w_n + 2$

donc (w_n) est arithmétique de raison 2

donc $w_n = w_0 + nr$ avec $w_0 = -1$, $r = 2$

$\boxed{w_n = -1 + 2n}$

4) On a : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ donc $u_n = v_n w_n$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times (2n-1)$

$= \frac{1}{2^n} \times (2n-1)$

donc $\boxed{u_n = \frac{2n-1}{2^n}}$

5) $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

On note P_n l'égalité : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ pour $n \geq 0$

① Montrons que $P(0)$ est vraie :

$\left.\begin{array}{l} S_0 = u_0 = -1 \\ 2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0} = 2 - \frac{3}{1} = -1 \end{array}\right]$ donc $P(0)$ vraie

② Montrons que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.

Hypothèse : $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

Montrons que $S_{n+1} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$ ou $S_{n+1} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$

On a $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}$ d'après 4)

$= 2 - \frac{(2n+3) \times 2}{2^n \times 2} + \frac{2n+2-1}{2^{n+1}}$

$= 2 - \frac{4n+6}{2^{n+1}} + \frac{2n+1}{2^{n+1}}$

$= 2 - \frac{4n+6}{2^{n+1}} - \frac{-2n-1}{2^{n+1}}$

$= 2 - \left(\frac{4n+6}{2^{n+1}} + \frac{-2n-1}{2^{n+1}}\right)$

$= 2 - \frac{4n+6-2n-1}{2^{n+1}}$

$= 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$ donc $P(n+1)$ vraie

③ Conclusion : $P(n)$ vraie pour tout $n \geq 0$