Suites et nombres complexes.

$$z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n$$

$$r_n = |z_n|$$

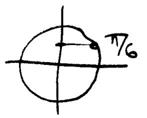
1) <u>forme exponentielle de $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$.</u>

* $r = \left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \frac{\sqrt{12}}{4}$

$r = \frac{2\sqrt{3}}{4}$ donc $\boxed{r = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

* <u>Argument : θ</u>

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

donc $\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$

<u>Conclusion :</u> $\boxed{\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6}}$

2a) <u>Montrer que (r_n) est géométrique</u>

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right| |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} r_n$$

donc (r_n) géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) <u>Expression de r_n en fonction de n.</u>

$r_n = r_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ $\qquad r_0 = |z_0| = |1| = 1$

$$\boxed{r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}$$

c) $OA_n = |z_{A_n} - z_0| = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

$0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ | car $\sqrt{3} < \sqrt{4}$ donc $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{2}{2}$ | donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} OA_n = 0$

donc la longueur OA_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, c.a.d A_n tend vers le point O.

3) a) <u>Algorithme :</u>

Variables	Initialisation	Traitement
n	0	1 2 3 4 5
R	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ $\frac{9}{16}$ $\frac{9\sqrt{3}}{32} < 0,5$.
P	0,5	

<u>Sortie :</u> $\boxed{n = 5}$

b) l'algorithme donne le plus petit entier n tel que $\boxed{r_n \leq P}$

Pour $P = 0,01$, on a $n = 33$ donc $OA_{32} > 0,01$ et $OA_{33} \leq 0,01$

4a) <u>Pour montrer que OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}, on peut montrer que</u> $(\overrightarrow{A_{n+1}O}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n}) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$

$$(\overrightarrow{A_{n+1}O}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n}) = \arg\left(\frac{z_n - z_{n+1}}{-z_{n+1}}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n - z_n}{\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{\cancel{z_n}\left(\frac{3}{4} - 1 + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{\cancel{z_n}\left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{(-1 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}{(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}\right) = \arg\left(\frac{-3 + i\sqrt{3} + i3\sqrt{3} + 3}{9 + 3}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{4i\sqrt{3}}{12}\right) = \arg\left(\frac{i\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$$

CQFD

b) $z_n = r_n e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$A_n \in (Oy) \iff \arg(z_n) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

$\iff \arg(z_n) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\iff n = \frac{\pi}{2} \times \frac{6}{\pi} + k\pi \times \frac{6}{\pi}$

$\iff n = 3 + 6k$

Comme $n \geq 0$ $\boxed{n = 3 + 6k \text{ avec } k \in \mathbb{N}}$

c) pt A_6 (z_6)

Rmq : $A_6 \in (Ox)$ car $z_6 = r_6 e^{i\frac{6\pi}{6}} = r_6 e^{i\pi}$.

et OA_5A_6 rectangle en A_6

donc A_6 est facile à placer.

pt A_7.

OA_6A_7 rectangle en A_7.

donc A_7 appartient au cercle de diamètre $[OA_6]$ et on ajoute $\frac{\pi}{6}$ en angle.

On trace (OA_1) et à l'intersection avec le cercle $\mathcal{C}$, on a le point A_7.

pt A_8.

$\hat{m}$ idée avec droite (OA_2)

et cercle de diamètre $[OA_7]$

pt A_9

Intersection du cercle de diamètre $[OA_8]$ avec l'axe des ordonnées.

Car $n =$