Equation de droites - Correction

Le plan est muni d'un repère.

1. Equation de droites

Ex 1 Déterminer une équation de la droite (MP) avec $M(-6\,;\,4)$ et $P(-8\,;\,-3)$

Coeff $(MP) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \dfrac{-3-4}{-8+6} = \dfrac{-7}{-2} = \dfrac{7}{2}$

(MP) a donc pour équation : $y = \dfrac{7}{2}x + b$

Le point M appartient à la droite donc ses coordonnées vérifient l'équation donc : $4 = \dfrac{7}{2} \times (-6) + b$

donc : $4 = -21 + b$ et donc $b = 25$

Conclusion : (MP) a pour équation : $\boxed{y = \dfrac{7}{2}x + 25}$

2. Lecture graphique

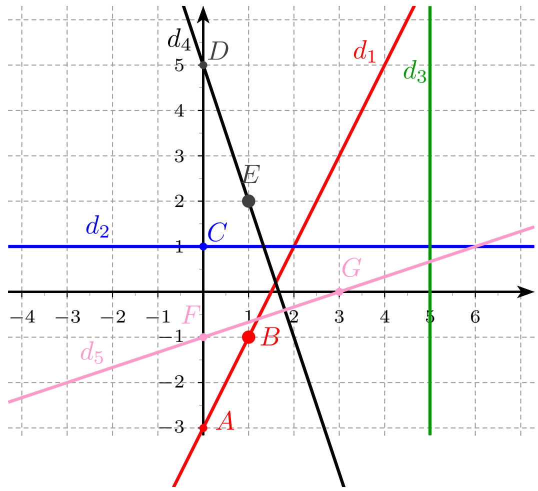
Ex 2 Si le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $(9\,;\,4)$, quel est le coefficient directeur de la droite (EF) ?

On a : $\Delta x = 9$ et $\Delta y = 4$

Si on note a le coefficient directeur, on a : $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\dfrac{4}{9}}$

Remarque : cette technique sera utilisée dans les exercices suivants pour la lecture graphique de coefficient directeur et la représentation d'une droite à partir de son coefficient directeur.

Ex 3 Déterminer par lecture graphique une équation des droites suivantes :



Pour (d_1) : on a : $b=-3$ $\overrightarrow{AB}(1\,;\,2)$ donc $a=\dfrac{2}{1}=2$ et donc $\boxed{y=2x-3}$

Pour (d_2) : la droite est parallèle à l'axe des abscisses donc $\boxed{y=1}$

Pour (d_3) : la droite est parallèle à l'axe des ordonnées donc $\boxed{x=5}$

Pour (d_4) : on a : $b=5$ et $\overrightarrow{DE}(1\,;\,-3)$ donc $a=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{-3}{1}=-3$ et donc $\boxed{y=-3x+5}$

Pour (d_5) : on a : $b=-1$ et $\overrightarrow{FG}(3\,;\,1)$ donc $a=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{3}$ et donc $\boxed{y=\dfrac{1}{3}x-1}$

3. Tracer une droite

Ex 4 Tracer dans un repère orthonormé, les droites suivantes :

1. (d_1) passant par $A(2\,;\,3)$ de coefficient directeur -2

On a : $a=-2=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ donc $\Delta x=1$ et $\Delta y=-2$ $\overrightarrow{AD}(1\,;\,-2)$

2. (d_2) passant par $B(0\,;\,2)$ de coefficient directeur 1

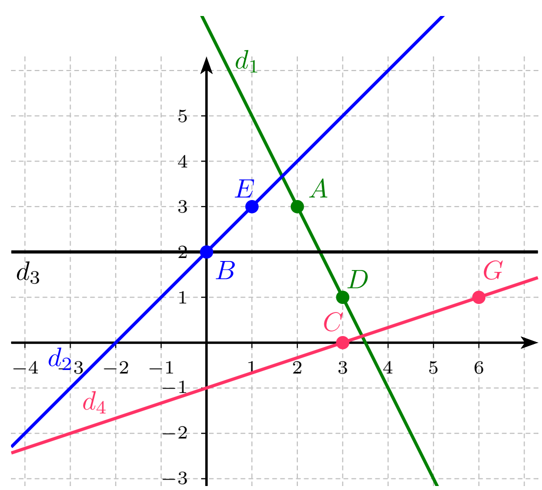
On a : $a=1=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ donc $\Delta x=1$ et $\Delta y=1$ $\overrightarrow{BE}(1\,;\,1)$

3. (d_3) passant par $B(0\,;\,2)$ de coefficient directeur 0

On a : $a=0$ donc la droite est parallèle à l'axe des abscisses.

4. (d_4) passant par $C(3\,;\,0)$ de coefficient directeur $\dfrac{1}{3}$

On a : $a=\dfrac{1}{3}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ donc $\Delta x=3$ et $\Delta y=1$ $\overrightarrow{CG}(3\,;\,1)$

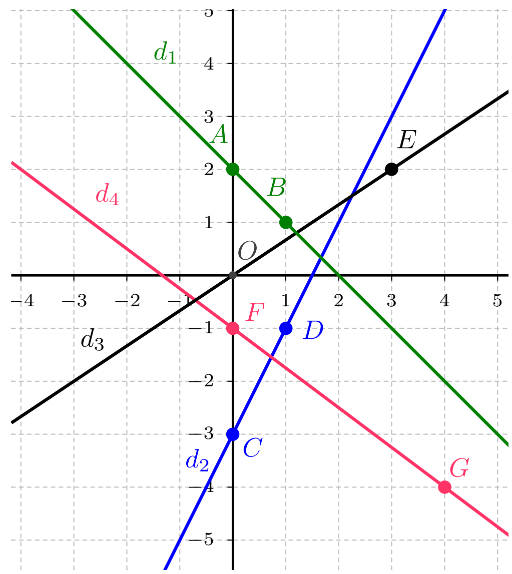


Ex 5 Tracer dans un repère orthonormé, les droites suivantes :

1. (d_1) de coefficient directeur -1 et d'ordonnée à l'origine 2.

On a : $b = 2$ donc on place le point $A(0\,;\,2)$

On a : $a = -1 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ donc $\Delta x = 1$ et $\Delta y = -1$ $\overrightarrow{AB}(1\,;\,-1)$



2. (d_2) de coefficient directeur 2 et d'ordonnée à l'origine -3.

On a : $b = -3$ donc on place le point $C(0\,;\,\text{-}3)$

On a : $a = 2 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ donc $\Delta x = 1$ et $\Delta y = 2$ $\overrightarrow{CD}(1\,;\,2)$

3. (d_3) de coefficient directeur $\dfrac{2}{3}$ et d'ordonnée à l'origine 0.

On a : $b = 0$ donc on considère le point $O(0\,;\,0)$

On a : $a = \dfrac{2}{3} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ donc $\Delta x = 3$ et $\Delta y = 2$ $\overrightarrow{OE}(3\,;\,2)$

4. (d_4) de coefficient directeur $\dfrac{-3}{4}$ et d'ordonnée à l'origine -1.

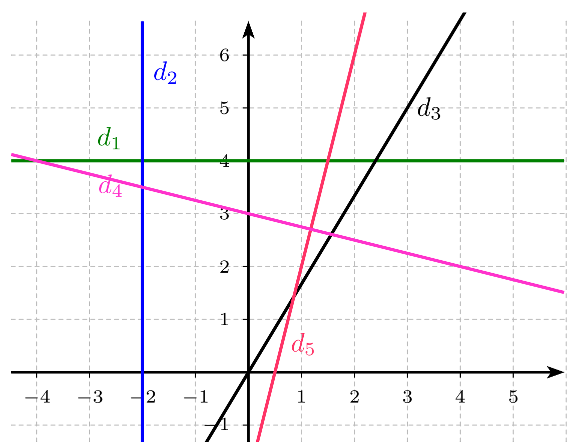
On a : $b = -1$ donc on considère le point $F(0\,;\,-1)$

On a : $a = \dfrac{-3}{4} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ donc $\Delta x = 4$ et $\Delta y = -3$ $\overrightarrow{FG}(4\,;\,-3)$

Ex 6 Tracer dans un repère orthonormé, les droites suivantes :

1. (d_1) d'équation $y = 4$.

La droite est parallèle à l'axe des abscisses.



2. (d_2) d'équation $x = -2$.

La droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

3. (d_3) d'équation $y = \dfrac{5}{3}x$.

La droite passe par l'origine du repère et vecteur de coordonnées $(3\,;\,5)$

4. (d_4) d'équation $y = 4x - 2$.

Point de coordonnées $(0\,;\,-2)$ et vecteur de coordonnées $(1\,;\,4)$

5. (d_5) d'équation $y = \dfrac{-1}{4}x + 3$.

Point de coordonnées $(0\,;\,3)$ et vecteur de coordonnées $(4\,;\,-1)$

4. Droites parallèles ou sécantes

Ex 7 Déterminer une équation de la droite (d) passant par le point $E(-5\,;\,4)$ et parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{-1}{2}x + 6$

Les droites sont parallèles, elles ont donc le même coefficient directeur donc $\text{Coeff}(d) = \dfrac{-1}{2}$

(d) a donc pour équation $y = \dfrac{-1}{2}x + b$

(d) passe par le point E donc les coordonnées du point E vérifient l'équation de (d).

On a donc : $\dfrac{-1}{2} \times (-5) + b = 4$ donc $b = 4 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{3}{2}$

Conclusion : la droite (d) a pour équation $\boxed{y = \dfrac{-1}{2}x = \dfrac{3}{2}}$

Ex 8 Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) d'équation respective $y = -2x + 3$ et $y = 3x - 7$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

$\text{Coeff}(d_1) = -2$ et $\text{Coeff}(d_2) = 3$.

Les coefficients directeurs sont différents donc les droites ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.

⚠ On est dans le plan. Ceci n'est plus vrai dans l'espace !

Dans l'espace, deux droites non sécantes peuvent être parallèles (si elles sont coplanaires) ou alors non coplanaires.

Les coordonnées de leur point d'intersection vérifient le système formée des deux équations : $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = 3x - 7 \end{cases}$

qui se résout facilement par substitution :

On a : $-2x + 3 = 3x - 7$

ce qui donne : $-5x = -10$

et donc : $\boxed{x = 2}$

On en déduit ensuite y à partir de : $y = -2x + 3$.

On a : $\boxed{y = -1}$

Conclusion : les coordonnées du point d'intersection sont $\boxed{(2\,;\,-1)}$