Inéquations

1. Savoir résoudre par opérations sur les inégalités une inéquation du type $ax + b > 0$

Méthode :

On isole l'inconnue x sachant que :

- on peut additionner ou soustraire un même nombre aux deux membres de l'inégalité

- on peut multiplier ou diviser les deux membres de l'inégalité par un nombre positif non nul.

- si on multiplie ou divise les deux membres de l'inégalité par un nombre négatif non nul, on change le sens de l'inégalité.

Exemple : Résoudre $7x - 5 > 0$:

$$7x - 5 > 0 \qquad +5$$
$$7x > 5 \qquad \div 7 > 0$$
$$x > \frac{5}{7}$$

Exemple : Résoudre $\dfrac{-6x}{7} + 5 > 0$

$$\frac{-6x}{7} + 5 > 0 \qquad -5$$
$$\frac{-6x}{7} > -5 \qquad \times 7 > 0$$
$$-6x > -35 \qquad \div(-6) < 0$$
$$x < \frac{-35}{-6}$$
$$x < \frac{35}{6}$$

2. Savoir déterminer le signe de $ax + b$ par étude des variations de la fonction affine associée

Méthode :

- Déterminer la valeur qui annule $ax + b$

- A partir du signe de a, on détermine les variations de la fonction affine $x \longmapsto ax + b$

• Si $a > 0$ la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$ et donc les signes sont $-$ jusqu'au 0 puis $+$

• Si $a < 0$ la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$ et donc les signes sont $+$ jusqu'au 0 puis $-$

Exemple : Donner le tableau de signe de $-4x + 3$

On reconnaît $ax + b$. (expression d'une fonction affine)

On a : $-4x + 3 = 0$ pour $x = \dfrac{3}{4}$

On a : $a = -4 < 0$ donc la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$

On a donc :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$-4x+3$		$+$	0	$-$	

3. Savoir déterminer le signe d'un produit ou d'un quotient

Méthode : Faire dans ce cas un tableau de signe

Exemple : Déterminer le signe de $(2-x)(3x-5)$ sur $\mathbb{R}$

• Etude du signe de $2-x$

On reconnaît $ax+b$.

(expression d'une fonction affine)

On a : $2-x=0$ pour $x=2$

On a : $a=-1<0$

donc la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$

• Etude du signe de $3x-5$

On reconnaît $ax+b$.

(expression d'une fonction affine)

On a : $3x-5=0$ pour $x=\frac{5}{3}$

On a : $a=3>0$

donc la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$

On a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x-5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(2-x)(3x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exemple : Déterminer le signe de $\frac{2x}{-3x+2}$ puis résoudre $\frac{2x}{-3x+2} \leqslant 0$

• Etude du signe de $2x$

On reconnaît $ax+b$.

(expression d'une fonction affine)

On a : $2x=0$ pour $x=0$

⚠ beaucoup d'erreur pour cette équation !

On a : $a=2>0$

donc la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$

• Etude du signe de $-3x+2$

On reconnaît $ax+b$.

(expression d'une fonction affine)

On a : $-3x+2=0$ pour $x=\frac{2}{3}$

On a : $a=-3<0$

donc la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-3x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x}{-3x+2}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

$$\frac{2x}{-3x+2} \leqslant 0 \quad \text{pour } x \in \left]-\infty\ ;\ 0\right] \cup \left]\frac{2}{3}\ ; +\infty\right[$$

4. Savoir résoudre une inéquation du type $ax^2 + bx > 0$

Méthode : Factoriser par x puis faire un tableau de signe pour le produit

Exemple : Résoudre $4x^2 + 5x > 0$

On a : $4x^2 + 5x > 0$ si et seulement si $x(4x+5) > 0$

x	$-\infty$		$\frac{-5}{4}$		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$4x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x(4x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$4x^2 + 5x > 0 \quad \text{pour } x \in \left]-\infty\ ;\ \frac{-5}{4}\right[\cup \left]0\ ; +\infty\right[$$