Points dans le plan muni d'un repère

Ex 1

Le plan est muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soient les points $A\ (3\,;\,-4)$, $B\ (-5\,;\,2)$ et $M\ (2\,;\,3)$.

L'objectif est de montrer que le point M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ par deux méthodes.

1. Méthode 1 : calculer les longueurs MA, MB et AB puis conclure.

$MA = \sqrt{(3-2)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{1+49} = \boxed{\sqrt{50}}$

⚠ Inutile de simplifier les racines car le but est de démontrer que le triangle est rectangle par la réciproque du théorème de Pythagore et donc de calculer les distances au carré.

$MB = \sqrt{(-5-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{49+1} = \boxed{\sqrt{50}}$

$AB = \sqrt{(-5-3)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{64+36} = \boxed{\sqrt{100}}$

On a : $MA^2 + MB^2 = AB^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AMB est rectangle en M.

Conclusion : le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$. ⚠ Propriété à connaître !

Remarque : le triangle AMB est aussi isocèle en M mais cela n'a pas d'importance ici.

2. Méthode 2 : calculer le rayon du cercle $\mathcal{C}$ et les coordonnées de son centre Ω puis conclure.

Le rayon est égal à la moitié du diamètre soit $\dfrac{AB}{2}$ donc 5. En effet $AB = \sqrt{100} = 10$

Le centre Ω est le milieu du diamètre $[AB]$.

Remarque : les mots « rayon » et « diamètre » désignent aussi bien le segment que la longueur du segment.

Coordonnées du centre Ω : $x_\Omega = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3-5}{2} = -1$

et $y_\Omega = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ donc $\boxed{\Omega\ (-1\,;\,-1)}$

Pour montrer que M appartient au cercle $\mathcal{C}$, on va montrer que $\Omega M = 5$ (ΩM égale au rayon)

On a : $\Omega M = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Conclusion : le point M appartient au cercle $\mathcal{C}$.