Valeur absolue - Correction

Ex 1 Ecrire sans valeur absolue :

1. $|2-\pi| = \pi - 2$

2. $|\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, $|x^2+\sqrt{2}| = x^2+\sqrt{2}$

car $x^2+\sqrt{2}$ toujours positif

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, $|x^2-4|$

Une étude de signe est nécessaire.

x^2-4 est un trinôme de racines 2 et -2, positif sauf entre les deux racines.

donc pour $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$, $|x^2-4| = x^2-4$

et pour $-2 \leqslant x \leqslant 2$ on a : $|x^2-4| = -x^2+4$

5. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x+2| - 3|x-1|$

Une étude de signe est nécessaire, le plus simple est de faire un tableau de signe regroupant le signe de $x+2$ et $x-1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	

Pour	$x \leqslant -2$	$f(x) = -x-2-3(-x+1)$	$= -x-2+3x-3$	$= 2x-5$
Pour	$-2 \leqslant x \leqslant 1$	$f(x) = x+2-3(-x+1)$	$= x+2+3x-3$	$= 4x-1$
Pour	$x \geqslant 1$	$f(x) = x+2-3(x-1)$	$= x+2-3x+3$	$= -2x+5$

Ex 2 Donner trois entiers strictement négatifs p vérifiant :

1. $2 < |p| < 7$

Valeurs possibles : -6, -5, -4, -3

2. $|p| \leqslant 4$

Valeurs possibles : -4, -3, -2 et -1

3. $|p| \geqslant 7$

Valeurs possibles : -7, -8, -9 ...

Ex 3 Traduire les phrases suivantes à l'aide d'une valeur absolue :

1. La distance de x à 5 est égale à 2

$|x-5| = 2$

2. La distance de a à 0 est égale à 5

$|a| = 5$

3. La distance de x à -8 est égale à 2

$|x+8| = 2$

4. La distance de b à 6 est supérieure ou égale à 5

$|b-6| \geqslant 5$

5. La distance de x à -9 est strictement inférieure à 7

$|x+9| < 7$

Ex 4 Traduire les écritures suivantes par une phrase contenant le mot « distance » :

1. $|x-6| = 5$

La distance de x à 6 est égale à 5.

2. $|x+12| = 3$

La distance de x à -12 est égale à 3.

3. $|x-4| > 8$

La distance de x à 4 est strictement supérieure à 8.

4. $|x| < 2$

La distance de x à 0 est strictement inférieure à 2.

5. $|x| = 4$

La distance de x à 0 est égale à 4.

Ex 5 Calculer : $\displaystyle\int_0^3 |x^2-2x|\ dx$

Il faut écrire la fonction sous l'intégrale sans valeur absolue pour pourvoir calculer l'intégrale.

Une étude de signe est nécessaire.

x^2-2x est un trinôme qui s'écrit sous forme factorisée $x(x-2)$ donc de racines 0 et 2.

Ce trinôme est positif sauf entre les deux racines.

donc pour $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 2$ $|x^2-2x| = x^2-2x$

et pour $0 \leqslant x \leqslant 2$ $|x^2-2x| = -x^2+2x$

L'intégrale est à calculer pour $x \in [0\,;3]$ donc il faut la décomposer en deux intégrales :

l'une sur $[0\,;2]$ et l'autre sur $[2\,;3]$

$$\int_0^3 |x^2-2x|\ dx = \int_0^2 -x^2+2x\ dx + \int_2^3 x^2-2x\ dx$$

Calcul de la première intégrale : $\displaystyle\int_0^2 -x^2+2x\ dx = \left[\frac{-x^3}{3}+x^2\right]_0^2 = 0-\frac{8}{3}+4-0 = \frac{4}{3}$

Calcul de la deuxième intégrale : $\displaystyle\int_2^3 x^2-2x\ dx = \left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3 = -\left(\frac{8}{3}-4\right) = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$

Conclusion : $\displaystyle\int_0^3 |x^2-2x|\ dx = \frac{4}{3}+\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

Ex 6 Résoudre : $|2x+1| = 4$

$2x+1=4$ ou $2x+1=-4$

$x=\dfrac{3}{2}$ ou $x=\dfrac{-5}{2}$

Ex 7 Résoudre : $|5x-2| = |x+4|$

$5x-2=x+4$ ou $5x-2=-x-4$

$x=\dfrac{3}{2}$ ou $x=\dfrac{-1}{3}$

Ex 8 **Traduire des inégalité sur a en inégalité sur $|a|$.**

Quelles inégalités vérifient $|a|$ si le réel a vérifie :

1. $-2<a<3$

$|a|<2$

2. $-10 \leqslant a < 2$

$|a|<2$

3. $a \geqslant 3$

$|a| \geqslant 3$

4. $a \leqslant -6$

$|a| \geqslant 6$

Ex 9 **Traduire des inégalité sur $|a|$ en inégalité sur a.**

Quelles inégalités vérifient a si le réel $|a|$ vérifie :

1. $|a| > 3$

$a < -3$ ou $a > 3$

2. $|a| \leqslant 2$

$-2 \leqslant a \leqslant 2$

3. $2 \leqslant |a| < 5$

$-5 < a \leqslant -2$ ou $2 \leqslant a < 5$

Ex 10 Résoudre :

1. $|x+5| < 2$

$-2 < x+5 < 2$

$-7 < x < -3$

2. $|a-4| \geqslant 3$

$a - 4 \leqslant -3$ ou $a - 4 \geqslant 3$

donc $a \leqslant 1$ ou $a \geqslant 7$

Ex 11 Soit la suite (u_n) telle que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

On a pour tout $n \geqslant 0$: $-\left(\frac{1}{2}\right)^n < u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'après le théorème des gendarmes la limite de u_n est 0.

En effet on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ pour $-1 < q < 1$.

Ex 12 Simplifier $\sqrt{4x^2}$

$\sqrt{4x^2} = 2|x|$ ⚠ Ne pas oublier la valeur absolue !

Ex 13 Simplifier $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$

$\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = |1-\sqrt{5}| = \sqrt{5} - 1$ ⚠ Ne pas oublier la valeur absolue !

car $1 - \sqrt{5}$ est négatif.