Fonction paire. Fonction impaire

Ex 1

1) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan(x)$

donc la fonction tangente est <u>impaire</u>

2) $sh(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$

$sh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{+x}}{2} = \dfrac{-(e^{x} - e^{-x})}{2} = -sh(x)$

donc la fonction sh est <u>impaire</u>

Rappel $|-x| = |x|$

3) $f(x) = |x| \cos x$ sur $\mathbb{R}$

$f(-x) = |-x| \cos(-x) = |x| \cos x = f(x)$

donc f est <u>paire</u> sur $\mathbb{R}$

4) $g(x) = \ln(|x - \sin x|)$ sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(-x) &= \ln(|-x - \sin(-x)|) \\ &= \ln(|-x + \sin x|) \\ &= \ln(|x - \sin x|) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

g est <u>paire</u> sur $\mathbb{R}$

<u>Remarque</u> :

$$\begin{aligned} &|-x + \sin x| \\ &= |(-1)(x - \sin x)| \\ &= |-1|\,|x - \sin x| \\ &= |x - \sin x| \end{aligned}$$

5) $h(x) = \cos x + x$ sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h(-x) &= \cos(-x) - x \\ &= \cos(x) - x \end{aligned}$$

h n'est <u>ni paire</u>, <u>ni impaire</u>

F.P.
(2)

Ex 2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable

1) a) f <u>paire</u> donc $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

par dérivation on a : $-f'(-x) = f'(x)$

c.à.d $f'(-x) = -f'(x)$

donc f' <u>impaire</u>

b) f <u>impaire</u> donc $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

par dérivation on a : $-f'(-x) = -f'(x)$

càd $f'(-x) = f'(x)$

donc f' <u>paire</u>

2 a) <u>Démontrer que</u> : f paire $\Longleftrightarrow$ f' impaire.

* D'après 1 a) f paire $\Longrightarrow$ f' impaire.
* <u>Supposons que f' est impaire</u>.

On a $f'(-x) = -f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Soit $g(x) = f(x) - f(-x)$

$$\begin{aligned} \text{on a } g'(x) &= f'(x) + f'(-x) \quad \text{sur } \mathbb{R} \\ &= f'(x) - f'(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

<u>donc g est constante sur $\mathbb{R}$</u>

or $g(0) = f(0) - f(0) = 0$

donc $g(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$

et donc $f(x) - f(-x) = 0$

càd $f(-x) = f(x)$

et f paire.

b) D'après 1 b) f impaire $\Longrightarrow$ f' paire.

<u>Supposons f' paire et montrons que f est impaire</u>

<u>si $f(0) = 0$</u>.

f' paire donc $f'(-x) = f'(x)$ On veut montrer que $h(x) = 0$

Soit $h(x) = f(x) + f(-x)$

On a $h'(x) = f'(x) - f'(-x)$ $\Big\}$ <u>f' paire</u>

$= f'(x) - f'(x) = 0$ donc h constante sur $\mathbb{R}$

donc $h(x) = h(0) = f(0) + f(0) = 0$ et donc $f(-x) = -f(x)$

CQFD