Raisonnement

1. Raisonnement par récurrence

a. Récurrence simple vue en TS

Ex 1

Démontrer par récurrence que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ pour tout $n \geqslant 1$.

Ex 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ (a réel non nul) et $u_{n+1} = u_n^2$ pour tout $n \geqslant 0$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Aide : conjecturer l'expression de u_n en fonction de n à partir des valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3 puis faire la preuve par récurrence de la formule conjecturée.

b. Récurrence forte

Ex 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_{n-1}}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Aide : conjecturer l'expression de u_n en fonction de n à partir des valeurs des premiers termes puis faire la preuve par récurrence de la formule conjecturée.

Méthode : La suite étant définie par une relation donnant u_{n+1} en fonction de u_n et u_{n-1}, l'hérédité consistera à supposer que P_n et P_{n-1} sont vraies et à démontrer qu'alors P_{n+1} est vraie. L'initialisation devra donc être vérifiée pour les deux premières valeurs de n, soit dans ce cas vérifier que P_0 et P_1 sont vraies

Ex 4

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 5$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a : $u_n = 2^n + 3^n$.

2. Raisonnement par analyse - synthèse

a. Principe du raisonnement

Méthode :

Le raisonnement **analyse - synthèse** est utilisé pour déterminer les solutions à un problème donné.

Dans la première partie (analyse), on détermine les propriétés d'une solution (en supposant qu'il en existe), ce qui donne des « candidats »possibles.

Dans la deuxième partie (synthèse), on détermine si parmi les « candidats »possibles, certains sont bien solution au problème posé.

b. Exemples de raisonnement par analyse - synthèse

Ex 5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que f peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Méthode :

Etape 1 : Analyse

On suppose le problème résolu, c'est-à-dire on suppose que $f(x) = p(x) + i(x)$ avec p paire et i impaire.

On en déduit des expressions de p et i.

Etape 2 : Synthèse

0n vérifie que les fonctions p et i obtenues à partir de l'étape 1 satisfont à toutes les conditions, à savoir $f(x) = p(x) + i(x)$, p paire et i impaire.

2. Déterminer pour $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ la décomposition en fonction paire et impaire.

Ex 6

On souhaite déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

pour tout réel x et y on a : $f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$ (*)

Etape 1 : Analyse :

Calculer dans ce cas la valeur de $f(0)$ puis montrer que f est paire et que f'' est constante.

Pour montrer que f'' est constante, on dérivera l'égalité (*) deux fois par rapport à x

puis on la dérivera deux fois par rapport à y.

Etape 2 : Synthèse : Conclure

3. Raisonnement par l'absurde

a. Principe du raisonnement

Méthode : Pour démontrer une propriété, on suppose que cette propriété est fausse. Ceci nous amène alors à une absurdité ou à une contradiction avec une des hypothèses. On en conclut alors que la propriété est vraie.

b. Exemples

Ex 7

Soit la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$

Démontrer que la suite (u_n) ne peut pas avoir pour limite un réel ℓ.

Ex 8

Soient trois réels x, y et z positifs tels que $xyz > 1$ et $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

1. Montrer que x, y et z sont distincts de 1.

On raisonnera par l'absurde en supposant que $x = 1$, ce qui amènera à une contradiction avec l'une des propriétés.

2. Montrer que $\min(x, y, z) < 1$.

On raisonnera également par l'absurde.

Ex 9

Soit $f : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et vérifiant pour tout m et n, on a $f(mf(n)) = n^2 f(mn)$.

1. Montrer que $f(f(n)) = n^2 f(n)$ pour tout entier m et n.

2. Montrer que $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tout entier m et n.

Calculer $f(f(m)f(n))$ puis la fonction f étant strictement monotone, utiliser la propriété si $f(a) = f(b)$ alors $a = b$.

3. Déduire des questions précédentes l'égalité $f(n) = n^2$ pour tout n.

Utiliser un raisonnement par l'absurde : supposer que $f(n) \neq n^2$.

Etudier le cas $f(n) > n^2$ et démontrer que $n^2 f(n) < (f(n))^2$. Conclure.