Systèmes

Ex1 $\begin{cases} -x + 3y - z = -6 \\ 3x + y - 4z = 5 \\ 4x - 7y + z = 17 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow 3L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow 4L_1 + L_3 \end{array} \begin{cases} -x + 3y - z = -6 \\ 10y - 7z = -13 \\ 5y - 3z = -7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \begin{cases} -x + 3y - z = -6 \\ 10y - 7z = -13 \\ -z = 1 \end{cases}$$

Par remontée : $\boxed{z = -1}$

puis $10y + 7 = -13$

donc $10y = -20$

$\boxed{y = -2}$

puis $-x - 6 + 1 = -6$

$\boxed{x = 1}$

Solution au système $\boxed{(1, -2, -1)}$

S(2)

Ex 2 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (2x - y + 5z,\ 4x + 2y - z,\ -2x + 3y + 2z)$

On cherche (x,y,z) tels que $f(x,y,z) = (0,0,0)$

cad $\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array} \begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ 4y - 11z = 0 \\ 2y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ 4y - 11z = 0 \\ -25z = 0 \end{cases}$$

Par remontée : $z = 0$

puis $y = 0$

puis $z = 0$

Solution $(0,0,0)$

Il existe un unique point Ω tel que $f(\Omega) = 0$

cad le point O.

S (3)

$\boxed{\text{Ex 3}}$ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$f(x,y,z) = (3x - y + 2z,\ x + 2y + 3z,\ 2x + y + 3z)$$

On cherche (x,y,z) tels que $f(x,y,z) = (0,0,0)$

càd
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \end{array} \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ -7y - 7z = 0 \\ -5y - 5z = 0 \end{cases}$$ même équation $-y-z=0$

$$\begin{array}{rl} 2L_1 : & 6x - 2y + 4z = 0 \\ -3L_3 : & -6x - 3y - 9z = 0 \\ \hline & -5y - 5z = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

Remarque : 2 équations à 3 inconnues. donc 2 inconnues principales et 1 inconnue secondaire qui passe en second membre (y ou z) (on choisit z)

$$\begin{cases} 3x - y = -2z \\ y = -z \end{cases}$$

On cherche les inconnues principales x et y en fonction de z

On a $\boxed{y = -z}$

puis $3x = y - 2z$

$3x = -3z$

$\boxed{x = -z}$

On a donc $\begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases}$

On pose $\boxed{z = k}$, les points cherchés vérifient

$$\begin{cases} x = -k \\ y = -k \\ z = k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$$

C'est la droite passant par O de vecteur directeur $\vec{u}\,(-1,-1,1)$

S(4)

$\boxed{\text{Ex 4}}$ Soient α, β, γ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$

càd $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow -2L_1 + L_2 \end{array} \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -2\beta + 3\gamma = 0 \\ 4\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{array} \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -2\beta + 3\gamma = 0 \\ 5\gamma = 0 \end{cases}$$

Par remontée : $\boxed{\begin{array}{l} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{array}}$

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont donc libres.

5(5)

$\boxed{\text{Ex 5}}$ $\vec{u}(2,1,-1)$ $\vec{v}(1,3,1)$ $\vec{w}(-5,0,4)$ sont-ils libres ?

Soient α, β, γ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$

càd. $\alpha\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-5\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

càd $\begin{cases} 2\alpha + \beta - 5\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \\ -\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 + 2L_3 \end{array} \begin{cases} 2\alpha + \beta - 5\gamma = 0 \\ -5\beta - 5\gamma = 0 \\ 3\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}$$

même équation
$\beta + \gamma = 0$

$\begin{cases} 2\alpha + \beta - 5\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0. \end{cases}$

2 équations à 3 inconnues.
donc 2 inconnues principales (on choisit α et β)
et une inconnue secondaire (donc γ)

$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 5\gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases}$

On va chercher α et β en fonction de γ.

On a $\boxed{\beta = -\gamma}$

donc $2\alpha = 5\gamma - \beta$

$2\alpha = 6\gamma$

$\boxed{\alpha = 3\gamma}$

Pour $\gamma = 1$, on a $\alpha = 3$ et $\beta = -1$

donc il existe α, β, γ non tous nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$

$$3\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas libres

On dit qu'ils sont liés.