Valeur absolue

1. Définition et propriétés

a. Définition

Définition : Soit un réel x. On note $|x|$ et on appelle valeur absolue de x le nombre défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

$|x|$ est la distance de x à 0.

Exemples :

- $|3| = 3$
- $|-6| = 6$
- $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x-3 \geqslant 0 \quad \text{c'est-à-dire pour} \quad x \geqslant 3 \\ -x+3 & \text{si } x-3 \leqslant 0 \quad \text{c'est-à-dire pour} \quad x \leqslant 3 \end{cases}$

Ex 1 Ecrire sans valeur absolue :

1. $|2-\pi|$
2. $|\sqrt{3}-1|$
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, $|x^2+\sqrt{2}|$
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, $|x^2-4|$
5. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x+2| - 3|x-1|$

   Pour cette question, on pourra s'aider d'un tableau de signes.

Ex 2 Donner trois entiers strictement négatifs p vérifiant :

1. $2 < |p| < 7$
2. $|p| \leqslant 4$
3. $|p| \geqslant 7$

Propriété : $|x-a|$ est la distance de x à a.

Sur un axe gradué, on a : $AB = |x_B - x_A|$

Ex 3 Traduire les phrases suivantes à l'aide d'une valeur absolue :

1. La distance de x à 5 est égale à 2

2. La distance de a à 0 est égale à 5

3. La distance de x à -8 est égale à 2

4. La distance de b à 6 est supérieure ou égale à 5

5. La distance de x à -9 est strictement inférieure à 7

Ex 4 Traduire les écritures suivantes par une phrase contenant le mot « distance » :

1. $|x-6| = 5$

2. $|x+12| = 3$

3. $|x-4| > 8$

4. $|x| < 2$

5. $|x| = 4$

Ex 5 Calculer : $\displaystyle\int_0^3 |x^2 - 2x| \, dx$

b. Propriétés

Propriété :

Pour tout réel x : $|x| \geqslant 0$

Pour tout réel x : $|-x| = |x|$

Pour tout réel x et k : $|kx| = |k| \times |x|$

Exemples :

- $|-2x| = |2x|$ ou $|-2x| = 2|x|$
- $|-2x+1| = |2x-1|$ en effet on peut écrire $|-2x+1| = |-(2x-1)| = |2x-1|$
  ou $|-(2x-1)| = |-1| \times |2x-1| = |2x-1|$

2. Egalités ou équations faisant intervenir une valeur absolue

Propriété :

Pour tout réel x et tout réel positif a, on a :

$|x| = a$ si et seulement si $\underbrace{x = a}_{\text{si } x \text{ positif}}$ ou $\underbrace{x = -a}_{\text{si } x \text{ négatif}}$

Ex 6 Résoudre : $|2x+1| = 4$

Propriété :

Pour tout réel x et y, on a :

$$|x| = |y| \quad \text{si et seulement si} \quad x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$$

Deux réels ont même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.

Ex 7 Résoudre : $|5x - 2| = |x + 4|$

3. Inégalités ou inéquations faisant intervenir une valeur absolue

Propriété :

Pour tout réel x et pour tout réel positif a, on a :

$$|x| \leqslant a \quad \text{si et seulement si} \quad -a \leqslant x \leqslant a$$

$$|x| \geqslant a \quad \text{si et seulement si} \quad \underbrace{x \leqslant -a}_{\text{si } x \text{ négatif}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x \geqslant a}_{\text{si } x \text{ positif}}$$

Exemples : Pour tout réel x, on a : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ on peut donc écrire : $|\cos x| \leqslant 1$

Ex 8 **Traduire des inégalité sur a en inégalité sur $|a|$.**

Quelles inégalités vérifient $|a|$ si le réel a vérifie :

1. $-2 < a < 3$

2. $-10 \leqslant a < 2$

3. $a \geqslant 3$

4. $a \leqslant -6$

Ex 9 **Traduire des inégalité sur $|a|$ en inégalité sur a.**

Quelles inégalités vérifient a si le réel $|a|$ vérifie :

1. $|a| > 3$

2. $|a| \leqslant 2$

3. $2 \leqslant |a| < 5$

Ex 10 Résoudre :

1. $|x + 5| < 2$

2. $|a - 4| \geqslant 3$

Ex 11 Soit la suite (u_n) telle que $|u_n| < \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Exemples d'utilisation de la valeur absolue

a. Simplification d'une racine carrée

Propriété : Pour tout réel x, on a : $\sqrt{x^2} = |x|$ (une racine carrée est toujours positive)

Ex 12 Simplifier $\sqrt{4x^2}$

Ex 13 Simplifier $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$

b. Norme d'un vecteur

Rappel : si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ alors $||\overrightarrow{u}|| = AB$

Propriété : Pour tout réel k et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a : $||k\overrightarrow{u}|| = |k| \times ||\overrightarrow{u}||$

(la norme d'un vecteur est toujours positive)

Exemples : $||-4\overrightarrow{u}|| = 4 \times ||\overrightarrow{u}||$

c. Aire sous une courbe ou entre deux courbes (le plan est muni d'un repère.

Propriété : On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par la représentation graphique d'une fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ avec $a \leqslant b$.

- Si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$

- Si $f(x) \leqslant 0$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\mathcal{A} = -\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ ou $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b (-f(x))\ dx$

Si on ne connait pas la position de la courbe de f par rapport à l'axe des abscisses, on note : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\ dx$

Propriété : On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par les représentations graphiques de deux fonctions f et g, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ avec $a \leqslant b$.

- Si $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b f(x) - g(x)\ dx$

- Si $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a\,;\,b]$ alors $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\ dx$

Si on ne connait pas les positions relatives des courbes de f et g, on note : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx$