Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples

1. Fraction du type $\dfrac{a}{(x-x_0)(x-x_1)}$

a. Propriété et méthode

Propriété :

Toute fraction du type $\dfrac{a}{(x-x_0)(x-x_1)}$ (a réel non nul)

peut s'écrire sous la forme $\dfrac{\alpha}{x-x_0}+\dfrac{\beta}{x-x_1}$ avec α et β réels (décomposition unique)

Méthode :

Etape 1 : pour déterminer α, on multiplie l'égalité par $x-x_0$ puis on pose $x=x_0$

Etape 2 : pour déterminer β, on multiplie l'égalité par $x-x_1$ puis on pose $x=x_1$

b. Application de la méthode pour $\dfrac{2}{(x-2)(x+3)}$:

On cherche α et β tels que : $\dfrac{2}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{\alpha}{x-2}+\dfrac{\beta}{x+3}$

Etape 1 : pour déterminer α, on multiplie l'égalité par $x-2$ ce qui donne : $\dfrac{2}{x+3}=\alpha+\dfrac{\beta(x-2)}{x+3}$

puis en posant $x=2$ on en déduit $\alpha=\dfrac{2}{5}$

Etape 2 : pour déterminer β, on multiplie l'égalité par $x+3$ ce qui donne : $\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{\alpha(x+3)}{x-2}+\beta$

puis en posant $x=-3$ on en déduit $\beta=\dfrac{2}{-5}=\dfrac{-2}{5}$

Conclusion : $\dfrac{2}{(x-2)(x+3)}=\dfrac{\frac{2}{5}}{x-2}+\dfrac{\frac{-2}{5}}{x+3}=\dfrac{2}{5(x-2)}-\dfrac{2}{5(x+3)}$

c. Procéder de la même façon pour décomposer les fractions suivantes :

Ex 1 $\dfrac{3}{(x-4)(x+2)}$

Ex 2 $\dfrac{1}{x^2-4}$

2. Fraction du type $\dfrac{a}{(x-x_0)^2(x-x_1)}$

Propriété : Toute fraction du type $\dfrac{a}{(x-x_0)^2(x-x_1)}$ (a réel non nul)

peut s'écrire sous la forme $\dfrac{\alpha}{x-x_0}+\dfrac{\beta}{(x-x_0)^2}+\dfrac{\gamma}{x-x_1}$ avec α, β et γ réels (décomposition unique).

Méthode :

Etape 1 : pour déterminer β, on multiplie l'égalité par $(x-x_0)^2$ puis on pose $x=x_0$

Etape 2 : pour déterminer γ, on multiplie l'égalité par $x-x_1$ puis on pose $x=x_1$

Etape 3 : pour déterminer α, on substitue à x une valeur au choix différente de x_0 et x_1 et on résout l'équation d'inconnue α

a. Application de la méthode pour $\dfrac{1}{(x-2)^2(x+1)}$:

On cherche α, β et γ tels que : $\dfrac{1}{(x-2)^2(x+1)}=\dfrac{\alpha}{x-2}+\dfrac{\beta}{(x-2)^2}+\dfrac{\gamma}{x+1}$

Etape 1 : pour déterminer β, on multiplie l'égalité par $(x-2)^2$ ce qui donne : $\dfrac{1}{x+1}=\alpha(x-2)+\beta+\dfrac{\gamma(x-2)^2}{x+1}$

puis en posant $x=2$ on en déduit $\beta=\dfrac{1}{3}$

Etape 2 : pour déterminer γ, on multiplie l'égalité par $x+1$ ce qui donne : $\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{\alpha(x+1)}{x-2}+\beta\dfrac{x+1}{(x-2)^2}+\gamma$

puis en posant $x=-1$ on en déduit $\gamma=\dfrac{1}{9}$

On a donc : $\dfrac{1}{(x-2)^2(x+1)}=\dfrac{\alpha}{x-2}+\dfrac{\frac{1}{3}}{(x-2)^2}+\dfrac{\frac{1}{9}}{x+1}$

Etape 3 : pour déterminer α, on peut prendre $x=1$ dans l'égalité ce qui donne : $\dfrac{1}{2}=-\alpha+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{18}$

on a donc $\alpha=\dfrac{1}{9}$

Conclusion : $\dfrac{1}{(x-2)^2(x+1)}=\dfrac{\frac{1}{9}}{x-2}+\dfrac{\frac{1}{3}}{(x-2)^2}+\dfrac{\frac{1}{18}}{x+1}$ soit $\dfrac{1}{(x-2)^2(x+1)}=\dfrac{1}{9(x-2)}+\dfrac{1}{3(x-2)^2}+\dfrac{1}{18(x+1)}$

b. Procéder de la même façon pour décomposer la fraction suivante :

Ex 3 $\dfrac{1}{(x-4)^2(x+2)}$

3. Applications

a. Calcul d'intégrale

Ex 4 Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+2)(x+4)}\mathrm{dx}$

b. Calcul de somme

Ex 5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$