Décomposer une fraction rationnelle

Ex1 $\quad \dfrac{3}{(x-4)(x+2)} = \dfrac{\alpha}{x-4} + \dfrac{\beta}{x+2}$

* Calcul de α : Multiplication par $x-4$

$$\frac{3}{x+2} = \alpha + \frac{\beta(x-4)}{x+2}$$

pour $x \to 4$ on a $\dfrac{3}{6} = \alpha$ d'où $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{2}}$

* Calcul de β : Multiplication par $x+2$

$$\frac{3}{x-4} = \frac{\alpha(x+2)}{x-4} + \beta$$

pour $x \to -2$ on a $\dfrac{3}{-6} = \beta$ d'où $\boxed{\beta = -\dfrac{1}{2}}$

* Conclusion : $\dfrac{3}{(x-4)(x+2)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{x-4} + \dfrac{-\frac{1}{2}}{x+2}$

ou $\boxed{\dfrac{3}{(x-4)(x+2)} = \dfrac{1}{2(x-4)} - \dfrac{1}{2(x+2)}}$

Ex2 $\quad \dfrac{1}{x^2-4}$

$$= \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta}{x-2}$$

* Calcul de α : Multiplication par $x+2$

$$\frac{1}{x-2} = \alpha + \frac{\beta(x+2)}{x-2}$$

pour $x \to -2$ on a $\dfrac{1}{-4} = \alpha$ d'où $\boxed{\alpha = -\dfrac{1}{4}}$

* Calcul de β : Multiplication par $x-2$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{\alpha(x-2)}{x+2} + \beta$$

pour $x \to 2$ on a $\dfrac{1}{4} = \beta$ d'où $\boxed{\beta = \dfrac{1}{4}}$

* Conclusion : $\dfrac{1}{x^2-4} = -\dfrac{1}{4(x+2)} + \dfrac{1}{4(x-2)}$

DF(2)

Ex3 $\quad \dfrac{1}{(x-4)^2(x+2)} = \dfrac{\alpha}{x-4} + \dfrac{\beta}{(x-4)^2} + \dfrac{\gamma}{x+2}$

* Calcul de β : Multiplication par $(x-4)^2$

$$\frac{1}{x+2} = \alpha(x-4) + \beta + \frac{\gamma(x-4)^2}{x+2}$$

pour $x \to 4$: $\boxed{\dfrac{1}{6} = \beta}$

* Calcul de γ : Multiplication par $x+2$

$$\frac{1}{(x-4)^2} = \frac{\alpha(x+2)}{x-4} + \frac{\beta(x+2)}{(x-4)^2} + \gamma$$

pour $x \to -2$ on a : $\boxed{\dfrac{1}{36} = \gamma}$

* On a donc : $\dfrac{1}{(x-4)^2(x+2)} = \dfrac{\alpha}{x-4} + \dfrac{1}{6(x-4)^2} + \dfrac{1}{36(x+2)}$
* Pour déterminer α on choisit de prendre $x = 1$

pour $x = 1$ on a : $\dfrac{1}{(-3)^2(3)} = \dfrac{\alpha}{-3} + \dfrac{1}{6(-3)^2} + \dfrac{1}{36 \times 3}$

$$\frac{1}{27} = -\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{54} + \frac{1}{108}$$

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{54} + \frac{1}{108} - \frac{2}{54}$$

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{2+1-4}{108}$$

$$\frac{\alpha}{3} = -\frac{1}{108}$$

$$\alpha = \frac{-3}{108}$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{1}{36}}$$

* Conclusion :

$$\boxed{\frac{1}{(x-4)^2(x+2)} = -\frac{1}{36(x-4)} + \frac{1}{6(x-4)^2} + \frac{1}{36(x+2)}}$$

DF(3)

Ex 4 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+2)(x+4)}\,dx$

1) Décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}$

$$\frac{1}{(x+2)(x+4)} = \frac{\alpha}{x+2} + \frac{\beta}{x+4}$$

Calcul de α : $\boxed{\times (x+2)}$ On a $\dfrac{1}{x+4} = \alpha + \dfrac{\beta(x+2)}{x+4}$

pour $x \to -2$ on a : $\boxed{\dfrac{1}{2} = \alpha}$

Calcul de β : $\boxed{\times (x+4)}$ on a $\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{\alpha(x+4)}{x+2} + \beta$

pour $x \to -4$ on a $\boxed{\dfrac{1}{-2} = \beta}$

Conclusion : $\dfrac{1}{(x+2)(x+4)} = \dfrac{1}{2(x+2)} - \dfrac{1}{2(x+4)}$

2) Calcul d'une primitive.

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+4}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \ln(x+2) - \frac{1}{2} \ln(x+4)$$

sur $[1,2]$ $x+2>0$ $x+4>0$.

3) Calcul de l'intégrale :

$$\int_1^2 \frac{1}{(x+2)(x+4)}\,dx = \Big[F(x)\Big]_1^2$$
$$= F(2) - F(1)$$
$$= \frac{1}{2}\ln(4) - \frac{1}{2}\ln(6) - \left[\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5\right]$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 6) - \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 5)$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{6}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln\left(\frac{3}{5}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{3}\right)$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{10}{9}\right)}$$

DF(4)

Ex 5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$

1) Décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{k(k+2)}$

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+2}$$

* Calcul de α. ($\times k$ puis $k \to 0$)

$\dfrac{1}{k+2} = \alpha + \dfrac{\beta k}{k+2}$ donc $\boxed{\alpha = \dfrac{1}{2}}$

* Calcul de β ($\times (k+2)$ puis $k \to -2$)

$\dfrac{1}{k} = \dfrac{\alpha(k+2)}{k} + \beta$ donc $\boxed{\beta = -\dfrac{1}{2}}$

* On a donc : $\boxed{\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{2k} - \dfrac{1}{2(k+2)}}$

2)
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(k+1)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\times\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\times\frac{1}{k+1}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

[On fait un décalage d'indice]

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}} - \cancel{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}} - \frac{1}{2(n+1)}$$
$$= \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}}$$

Remarque :

Cette somme tend vers $\frac{1}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.