Raisonnement

Ex1 Démontrer que $\underbrace{1^3+2^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}_{\mathcal{P}(n)}$ $n\geq 1$

1) pour $n=1$

$$\left.\begin{array}{l} 1^3=1 \\ \text{et } \left(\frac{1\times 2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1 \end{array}\right\} \mathcal{P}(1) \text{ est vraie}$$

2) Soit $n\geq 1$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et on va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie

On a :
$$\begin{aligned}
1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{4(n+1)^3}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

3) Conclusion. D'après le principe de raisonnement par récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\geq 1$

R(2)

Ex2 $u_0=a$ $(a\neq 0)$ $u_{n+1}=u_n^2$, $n\geq 0$.

Conjecture ?

$$\begin{aligned}
u_0 &= a &&= a^{2^0} \\
u_1 &= a^2 &&= a^{2^1} \\
u_2 &= (a^2)^2 = a^4 &&= a^{2^2} \\
u_3 &= (a^4)^2 = a^8 &&= a^{2^3}
\end{aligned}$$

Conjecture : $u_n = a^{2^n}$

Preuve par récurrence : On note $\mathcal{P}(n)$: $u_n=a^{2^n}$ $n\geq 0$

* $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $a^{2^0}=a^1=a=u_0$.
* Soit $n\geq 0$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
  On va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  On a $u_{n+1}=u_n^2=\left(a^{2^n}\right)^2$
  $= a^{2^n\times 2} = a^{2^{n+1}}$
  donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
* Conclusion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\geq 0$.

R(3)

Ex 3. $u_0 = 1 \quad u_1 = 2 \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_{n-1}} \quad n \geq 1$

Conjecture ? $u_2 = \dfrac{u_1^2}{u_0} = 4$

$u_3 = \dfrac{u_2^2}{u_1} = \dfrac{16}{2} = 8$ $\quad \times 2$

$u_4 = \dfrac{u_3^2}{u_2} = \dfrac{64}{4} = 16$ $\quad \times 2$

Conjecture
(u_n) géométrique
de raison 2

donc $u_n = u_0 \times q^n$

$u_n = 1 \times 2^n$

Conjecture : $\boxed{u_n = 2^n}$

Preuve par récurrence :

On note $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 2^n$ pour $n \geq 0$

* $\mathcal{P}(0)$ vraie car $u_0 = 1 = 2^0$.
* Soit $n \geq 0$ on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie
on va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_{n-1}}$

A ce stade, on se rend compte qu'une récurrence simple ne convient pas car u_n et u_{n-1} interviennent

Récurrence "forte"

* $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies
car $u_0 = 1 = 2^0$
et $u_1 = 2 = 2^1$
* Soit $n \geq 1$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ sont vraies
On va montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_{n-1}} = \dfrac{(2^n)^2}{2^{n-1}} = \dfrac{2^{2n}}{2^{n-1}}$

$= 2^{2n-(n-1)}$

$= 2^{n+1}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

* Conclusion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$

R(4)

Ex 4 $u_0 = 2 \quad u_1 = 5 \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour $n \geq 0$.

Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 2^n + 3^n$.

On note $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 2^n + 3^n$.

* pour $n = 0$ $\quad 2^0 + 3^0 = 1 + 1 = 2 = u_0$.
pour $n = 1$ $\quad 2^1 + 3^1 = 2 + 3 = 5 = u_1$
donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies
* Soit $n \geq 0$; on suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on va montrer que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie

On a $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$

$= 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n)$

$= 5 \times 2^{n+1} + 5 \times 3^{n+1} - 6 \times 2^n - 6 \times 3^n$

$= 2^n(5 \times 2 - 6) + 3^n(5 \times 3 - 6)$

$= 2^n(4) + 3^n(9)$

$= 2^n \times 2^2 + 3^n \times 3^2$

$= 2^{n+2} + 3^{n+2}$

donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

* Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$

R(5)

Ex 5 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1) <u>Etape 1 : Analyse</u> : Supposons que $f(x) = p(x) + i(x)$ avec p paire et i impaire

On a : $f(-x) = p(-x) + i(-x)$
$f(-x) = p(x) - i(x)$ (*) p paire et i impaire
et $f(x) = p(x) + i(x)$ (**)

<u>Par addition de (*) et (**)</u>

on a $2p(x) = f(-x) + f(x)$

et $\boxed{p(x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2}}$

<u>Par soustraction de (**) et (*)</u>

$2i(x) = f(x) - f(-x)$

$\boxed{i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}}$

Donc si p et i existent, elles sont forcément de la forme trouvée.

<u>Etape 2. Synthèse</u>, les fonctions p et i trouvées sont elles bien solutions au problème ?

pour tout $x \in \mathbb{R}$

① p paire ? $p(-x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = p(x)$ $\boxed{\text{oui}}$

② i impaire ? $i(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x)$ $\boxed{\text{oui}}$

③ $f(x) = p(x) + i(x)$?

$p(x) + i(x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

$= \dfrac{2f(x)}{2}$

$= f(x)$ $\boxed{\text{oui}}$

<u>Conclusion</u> : f s'écrit bien comme la somme d'une fonction paire et impaire
(et cette décomposition est unique.

R(6)

2) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

* $p(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{x^2+1} + \dfrac{-x+1}{x^2+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x^2+1}\right)$

$\boxed{p(x) = \dfrac{1}{x^2+1}}$

* $i(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\dfrac{x+1}{x^2+1} - \dfrac{-x+1}{x^2+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\dfrac{x+1-(-x+1)}{x^2+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\dfrac{x+1+x-1}{x^2+1}\right)$

$i(x) = \frac{1}{2}\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

$\boxed{i(x) = \dfrac{x}{x^2+1}}$

* $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{x}{x^2+1}$

<u>Remarque</u> : On aurait pû décomposer $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ sans calcul en $\dfrac{x}{x^2+1} + \dfrac{1}{x^2+1}$ à condition de bien préciser que la première fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est impaire et la seconde fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est paire.

R(7)

$\boxed{\text{Ex 6}}$ On cherche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$ pour tout x et y réels.

<u>Etape 1 : Analyse</u> : On suppose que f existe

<u>dans ce cas pour $x = 0$ et $y = 0$</u>

on a $f(0) + f(0) = 2(f(0) + f(0))$

$2f(0) = 4f(0)$

$2f(0) = 0$

donc $\boxed{f(0) = 0}$

<u>et pour $x = 0$ et y quelconque on a</u> :

$f(y) + f(-y) = 2(f(0) + f(y))$

$f(y) + f(-y) = 2f(y)$

et donc $f(-y) = f(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$

c.a.d. f <u>paire</u>

On a : $f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$ $(*)$

<u>Si on dérive $(*)$ deux fois par rapport à x, on a</u> :

$f'(x+y) + f'(x-y) = 2f'(x)$

puis $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)$ (1)

<u>Si on dérive $(*)$ deux fois par rapport à y, on a</u> :

$f'(x+y) - f'(x-y) = 2f'(y)$

$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(y)$ (2)

<u>En comparant (1) et (2), on a</u> : $2f''(x) = 2f''(y)$

Soit $f''(x) = f''(y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

c.à.d f'' est constante.

Soit $f''(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$

d'où $f'(x) = ax + b$

et $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$

R(8) D'après $f(0) = 0$ on a $\boxed{c = 0}$

et f étant <u>paire</u> on a $\boxed{b = 0}$

donc $\boxed{f(x) = kx^2}$ $k \in \mathbb{R}$. (en posant $k = \frac{a}{2}$)

<u>Seul</u> "candidat" possible au problème.

<u>Etape 2 : Synthèse</u> : le candidat trouvé convient-il ?

On a-t-on $f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$?

On a : $f(x+y) + f(x-y) = k(x+y)^2 + k(x-y)^2$

$= k(x^2 + 2xy + y^2)$

$+ k(x^2 - 2xy + y^2)$

$= 2kx^2 + 2ky^2$

$= 2(kx^2 + ky^2)$

$= 2(f(x) + f(y))$

<u>Conclusion</u> : les solutions au problème posé sont toutes les fonctions de la forme $x \longmapsto kx^2$

$k \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Ex 7}}$ $u_0 = 0$ $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$

Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + e^{-u_n}$

$$\ell = \ell + e^{-\ell}$$

et donc $e^{-\ell} = 0$

ce qui est impossible.

donc (u_n) ne tend pas vers ℓ.

$\boxed{\text{Ex 8}}$ Soient x, y, z positifs tels que $xyz > 1$

et $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

1) Montrons que $x \neq 1$, $y \neq 1$ et $z \neq 1$

* Supposons que $x = 1$

on a alors $\boxed{yz > 1}$ $(*)$ et $1 + y + z < 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

soit $\boxed{y + z < \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$ $(**)$

D'après $(*)$ on a donc

$y > \frac{1}{z}$ car $z > 0$

et $z > \frac{1}{y}$ car $y > 0$.

et donc par addition des inégalités

$y + z > \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

ce qui est contradictoire avec $(**)$

donc $\boxed{x \neq 1}$

* On démontrerait de même que $\boxed{y \neq 1}$ et $\boxed{z \neq 1}$

2) Montrons que $\min(x,y,z) < 1$

Supposons que $\min(x,y,z) \geq 1$

càd $\min(x,y,z) > 1$ car x, y, z sont différents de 1

On a donc $x > 1$, $y > 1$ et $z > 1$

Si $x > 1$ alors $\frac{1}{x} < 1$ et donc $\boxed{\frac{1}{x} < x}$

de même on a $\boxed{\frac{1}{y} < y}$ et $\boxed{\frac{1}{z} < z}$

donc par addition de ces trois inégalités

on a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < x + y + z$.

d'où la contradiction avec la propriété donnée dans l'énoncé.

Conclusion : $\min(x,y,z) \geq 1$ est faux

et donc on a $\min(x,y,z) < 1$

R(11)

Ex 9 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante avec $f(0) = 0$.
et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad f(m f(n)) = n^2 f(mn)$ $(*)$

1) Montrer que $f(f(n)) = n^2 f(n)$

Soit $m = 1$ on a $f(f(n)) = n^2 f(n)$

2) Montrer que $f(mn) = f(m) f(n)$ pour tout n et m.

$$\begin{aligned} f(f(m) f(n)) &= n^2 f(f(m) n) \quad \text{d'après } (*) \\ &= n^2 f(n f(m)) \\ &= n^2 m^2 f(nm) \quad \text{d'après } (*) \\ &= (nm)^2 f(nm) \\ &= f(f(mn)) \quad \text{d'après 1)} \end{aligned}$$

On a $f(f(m) f(n)) = f(f(mn))$
or f strictement croissant donc
si $f(a) = f(b)$ alors $a = b$.
on a donc $f(m) f(n) = f(mn)$ CQFD

3) Montrer que $f(n) = n^2$ (raisonn^t par l'absurde)

$n \geq 1$

Supposons $f(n) \neq n^2$, prenons le cas où $\boxed{f(n) < n^2}$

Montrons que $n^2 f(n) < f(n)^2$

On a $n^2 f(n) = \underbrace{f(f(n)) < f(n^2)}_{} = f(n)^2$ d'après 2)

d'après 1) car $f(n) < n^2$ et f strictement croissante.

donc $n^2 f(n) < f(n)^2$ $(**)$

Remarque
$f(0) = 0$
donc
$f(0) = 0^2$
Preuve pour
$n \geq 1$

f strictement croissante donc $f(n) > f(0)$
et donc $\boxed{f(n) > 0}$
on divise $(**)$ par $f(n) > 0$ on a $\boxed{n^2 < f(n)}$
d'où contradiction avec $f(n) < n^2$

Dans le cas où $f(n) < n^2$, on arrive de même à $f(n) > n^2$ donc contradiction.

Conclusion $f(n) \neq n^2$ impossible donc $f(n) = n^2$