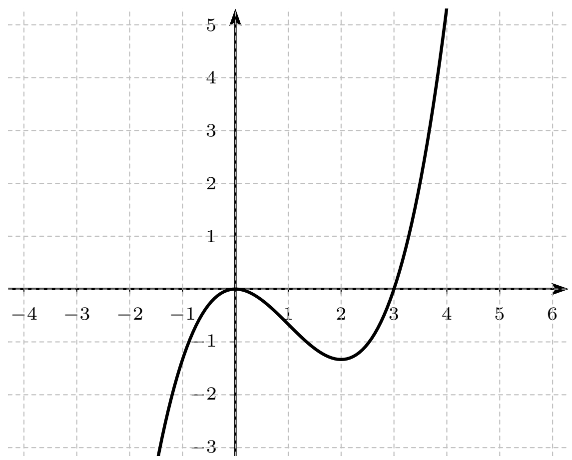
Exercice - Fonctions - Correction

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2$



1. Par lecture graphique, conjecturer :

a. les variations de f sur $\mathbb{R}$,

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-1,3$	$\nearrow$	

b. les valeurs qui annulent f,

Il semble que $f(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x = 3$.

c. le signe de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

2. **a.** Par le calcul, déterminer les solutions à l'équation $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^3}{3} - x^2 = 0$ ⚠ Penser à factoriser !

$\Leftrightarrow \quad x^2\left(\dfrac{x}{3} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad$ ou $\quad \dfrac{x}{3} - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{x = 3}$$

b. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

On a : $\quad f(x) = x^2\left(\frac{x}{3} - 1\right)$.

$x^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0

$\frac{x}{3} - 1$ est de la forme $ax + b$ avec $a = \frac{1}{3} > 0$ donc la fonction affine $x \longmapsto \frac{x}{3} - 1$ est croissante.

Cette fonction affine s'annule en 3, d'où le tableau de signe de $f(x)$.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{x}{3} - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2(-5x+3)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

3. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 4x$.

a. Avec votre calculatrice, conjecturer les coordonnées des points d'intersection des courbes de f et de g.

La calculatrice nous donne comme valeur approchée :

- pour le premier point d'intersection : $x \approx -3,46$ et $y \approx -25,86$

- pour le deuxième point d'intersection : $x \approx 0$ et $y \approx 0$

- pour le troisième point d'intersection : $x \approx 3,46$ et $y \approx 1,86$

b. Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection des courbes de f et de g.

Il faut résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

$$\begin{aligned}
f(x) = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^3}{3} - x^2 = -x^2 + 4x \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^3}{3} - x^2 + x^2 - 4x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^3}{3} - 4x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x\left(\frac{x^2}{3} - 4\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{3} - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{3} = 4
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad x^2 = 12$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad x = \sqrt{12} \quad$ ou $\quad x = -\sqrt{12}$

$\Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad x = 2\sqrt{3} \quad$ ou $\quad x = -2\sqrt{3}$

Les deux courbes se coupent aux points d'abscisses : 0, $\quad 2\sqrt{3} \quad$ et $\quad -2\sqrt{3}$

⚠ Penser à vérifier que $2\sqrt{3} \approx 3,46$

c. Calculer l'ordonnée du point d'intersection d'abscisse strictement positive.

On a : $\quad x = 2\sqrt{3} \quad$ et $\quad y = g\left(2\sqrt{3}\right)$.

⚠ On a aussi $y = f\left(2\sqrt{3}\right)$, mais il est plus simple d'utiliser g pour le calcul.

$y = g\left(2\sqrt{3}\right) = -\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 4\left(2\sqrt{3}\right)$

$y = -4 \times 3 + 8\sqrt{3}$

$y = -12 + 8\sqrt{3}$ ⚠ Penser à vérifier que $-12 + 8\sqrt{3} \approx 1,86$

Conclusion : le point cherché a pour coordonnées : $\boxed{\left(2\sqrt{3}\ ;\ -12 + 8\sqrt{3}\right)}$