

Puissances et factoriels

1.

Puissances

**Ex 1** Soient  $a$  un réel non nul,  $n$  et  $k$  deux entiers.

Exprimer en fonction de  $a^n$  :

$$a^{kn} = (a^n)^k$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{n^2} = (a^{n \times n}) = (a^n)^n$$

$$a^{3n+1} = a^{3n} \times a^1 = (a^n)^3 \times a$$

2.

**Notation :**  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$  pour  $n$  entier naturel non nul

**Ex 2**

1.  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

2.  $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! \times (n+2) \times (n+3)}{(n+1)!} = (n+2)(n+3)$

$$(n+1)! - n! = n! \times (n+1) - n! = n! \times (n+1-1) = n! \times n = n n!$$

$$\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{n+2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

⚠ Ne pas oublier les parenthèses !

3. Soit  $p$  un entier tel que  $0 \leq p \leq n$ , simplifier :  $\frac{n!}{(n-p)!}$ .

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-p)!} &= \frac{(n-p)! \times (n-p+1) \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n}{(n-p)!} \\ &= (n-p+1) \times (n-p+2) \times \dots \times n \end{aligned}$$

Combien de facteurs contient le résultat ?

Le résultat s'écrit sous la forme :  $(n - 0) \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - (p - 1))$

donc il comprend  $(p - 1) + 1$  facteurs soit  $\boxed{p \text{ facteurs}}$ .

**Ex 3** Soit  $u_n = \frac{a^n}{n! b^{2n}}$  pour  $n \geq 1$ .

Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ .

$$u_{n+1} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)! b^{2(n+1)}} = \frac{a^n \times a}{n! \times (n+1) \times (b^{2n+2})} = \frac{a^n}{n! b^{2n}} \times \frac{a}{(n+1)b^2} = \boxed{u_n \times \frac{a}{(n+1)b^2}}$$