Suites

Ex 1 u_0, u_1 et $u_n = 4(u_{n-1} - u_{n-2})$ pour $n \geq 2$

1) $\boxed{u_2 = 4(u_1 - u_0)}$

$u_3 = 4(u_2 - u_1) = 4u_2 - 4u_1$
$= 4 \times 4(u_1 - u_0) - 4u_1$
$= 16u_1 - 16u_0 - 4u_1$

$\boxed{u_3 = 12u_1 - 16u_0}$

2) $u_n = 2^n b_n$ pour $n \geq 0$

On a : $b_n = \dfrac{u_n}{2^n}$

donc $b_n - b_{n-1} = \dfrac{u_n}{2^n} - \dfrac{u_{n-1}}{2^{n-1}} = \dfrac{u_n - 2u_{n-1}}{2^n}$

$b_{n-1} - b_{n-2} = \dfrac{u_{n-1}}{2^{n-1}} - \dfrac{u_{n-2}}{2^{n-2}} = \dfrac{2u_{n-1} - 4u_{n-2}}{2^n}$

On a : $u_n = 4(u_{n-1} - u_{n-2})$

donc $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$

donc $u_n - 2u_{n-1} = 2u_{n-1} - 4u_{n-2}$

et donc $\boxed{b_n - b_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}}$ (*)

Si on note $t_n = b_n - b_{n-1}$ pour $n \geq 1$

on a : $t_n = t_{n-1}$ d'après (*)

ce qui signifie que la suite (t_n) est constante.

et donc $t_n = t_1$ pour tout $n \geq 1$

$t_n = b_1 - b_0$

$t_n = \dfrac{u_1}{2} - \dfrac{u_0}{1}$

et donc $b_n - b_{n-1} = \frac{1}{2}u_1 - u_0$.

ou $b_n = b_{n-1} + \underbrace{\tfrac{1}{2}u_1 - u_0}_{\text{constante}}$. pour $n \geq 1$

La suite (b_n) est donc arithmétique de premier terme $b_0 = u_0$. et de raison $\frac{1}{2}u_1 - u_0$.

Su(2)

On a donc : $b_n = b_0 + nr$

$b_n = u_0 + n(\frac{1}{2}u_1 - u_0)$

$b_n = u_0 + \frac{n}{2}u_1 - nu_0$.

$\boxed{b_n = (1-n)u_0 + \frac{n}{2}u_1}$

et $u_n = 2^n b_n = (1-n)2^n u_0 + 2^n \times \frac{n}{2} u_1$

$\boxed{u_n = (1-n)2^n u_0 + n\,2^{n-1}u_1}$ pour $n \geq 0$

3) Si $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$

alors $u_n = (1-n)2^n + n2^{n-1} \times 2$

$u_n = (1-n)2^n + n2^n$

$u_n = 2^n - n2^n + n2^n$

$\boxed{u_n = 2^n}$

$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$.

$= \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1-2}$

$= \dfrac{1 - 2^{n+1}}{-1}$

$\boxed{S = -1 + 2^{n+1}}$

Remarque : $S \longrightarrow +\infty$ quand $n \to +\infty$ car $2 > 1$

et $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $q > 1$

Rappel : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ ← nbre de termes.

Su (3)

Ex 2 $a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. pour $n \geq 1$

1) $(1+\sqrt{5})^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}$

$(1-\sqrt{5})^2 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 = 6 - 2\sqrt{5}$

2) $b_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$ pour $n \geq 1$

a) $b_1 = \dfrac{1+\sqrt{5} - (1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$ $\boxed{b_1 = 1}$

$b_2 = \dfrac{(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 2$ $\boxed{b_2 = 2}$

b) $b_{n+1} + b_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} + \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$

$= \dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1} + 2(1+\sqrt{5})^n - 2(1-\sqrt{5})^n}{2^{n+1}\sqrt{5}}$

$= \dfrac{(1+\sqrt{5})^n\left((1+\sqrt{5})+2\right) - (1-\sqrt{5})^n\left((1-\sqrt{5})+2\right)}{2^{n+1}\sqrt{5}}$

$= \dfrac{(1+\sqrt{5})^n(3+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})^n(3-\sqrt{5})}{2^{n+1}\sqrt{5}}$

On a : $b_{n+2} = \dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2}}{2^{n+2}\sqrt{5}}$

et $b_{n+1} + b_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n(6+2\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})^n(6-2\sqrt{5})}{2^{n+2}\sqrt{5}}$

(après mise au même dénominateur que b_{n+2} par multiplication par 2 du numérateur et dénominateur)

D'après 1) on en déduit que :

$b_{n+1} + b_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^n(1-\sqrt{5})^2}{2^{n+2}\sqrt{5}}$

$= \dfrac{(1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2}}{2^{n+2}\sqrt{5}}$

donc $\boxed{b_{n+1} + b_n = b_{n+2}}$

Su (4)

3 a) $c_{n+2} = b_{n+2} - a_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Or $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (1)

et $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$. (2)

Avec (2) − (1) on obtient :

$b_{n+2} - a_{n+2} = b_{n+1} - a_{n+1} + b_n - a_n$.

soit $\boxed{c_{n+2} = c_{n+1} + c_n}$

b) $c_1 = b_1 - a_1 = 1 - 1 = 0$

$c_2 = b_2 - a_2 = 1 - 1 = 0$

or $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$

donc tous les termes de (c_n) sont nuls

càd pour tout $n \in \mathbb{N}$ $c_n = 0$

et donc $\boxed{b_n = a_n}$

càd $\boxed{a_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}}$

Su (5)

$\boxed{\text{Ex 3}}$ $u_{n+1} = a u_n + b$ $\quad a \neq 1$, $a \neq 0$.

l solution de $ax + b = l$

cad $\boxed{al + b = l}$

On pose $V_n = u_n - l$

1) $V_{n+1} = u_{n+1} - l = a u_n + b - l$

$= a u_n + b - (al + b)$

$= a u_n + \cancel{b} - al - \cancel{b}$

$= a(u_n - l)$

$= a V_n$

$\boxed{V_{n+1} = a V_n}$ donc (V_n) est géométrique de raison a.

2) On a donc $V_n = V_0 \times q^n$ pour $n \geq 0$

$\boxed{V_n = (u_0 - l) \times a^n}$ $\quad V_0 = u_0 - l$

et $u_n = V_n + l$

$\boxed{u_n = (u_0 - l) a^n + l}$

3) * Si $\boxed{a > 1}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

si $u_0 - l > 0$

cad si $\boxed{u_0 > l}$

Rappel
$a \neq 1$
$a \neq 0$.

et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty}$ si $\boxed{u_0 > l}$

si $\boxed{u_0 = l}$ alors $V_n = 0$ pour tout $n \geq 0$.

et $u_n = l$ pour tout $n \geq 0$.

donc (u_n) suite constante et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l}$

* Si $\boxed{0 < a < 1}$ et si $\boxed{-1 < a < 0}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l}$

* Si $\boxed{a \leq -1}$ a^n n'a pas de limite

et de même pour (u_n)