Suites

1. Exercices

Ex 1

Une suite réelle (u_n) est définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 et par la relation $u_n = 4(u_{n-1} - u_{n-2})$ pour $n \geqslant 2$.

1. Calculer u_2 et u_3 en fonction de u_0 et u_1.

2. Montrer que la suite (b_n) définie pour tout n par $u_n = 2^n b_n$, vérifie pour $n \geqslant 2$ la relation $b_n - b_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}$.

En déduire l'expression de b_n, puis celle de u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

3. On suppose que $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

Ex 2

On donne la suite (a_n) définie par $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ et par la relation $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pour $n \geqslant 1$.

1. Calculer $(1+\sqrt{5})^2$ et $(1-\sqrt{5})^2$.

2. On pose pour $n \geqslant 1$, $b_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}$.

a. Calculer b_1 et b_2.

b. Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$.

3. On pose pour $n \geqslant 1$, $c_n = b_n - a_n$.

a. Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$.

b. Calculer c_1 et c_2. Que peut-on en déduire pour c_n ? pour a_n ?

2. Suite arithmético - géométrique

Définition :

Une suite est arithmético - géométrique si elle est de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ avec a et b deux réels.

Remarque : si $a = 1$, la suite est arithmétique,

si $a = 0$, la suite est constante,

si $b = 0$, la suite est géométrique.

Ex 3

On suppose que $a \neq 1$ et $a \neq 0$.

Soit ℓ solution de l'équation $ax + b = x$. On pose $V_n = u_n - \ell$.

1. Démontrer que (V_n) est géométrique.

2. En déduire l'expression de V_n puis u_n en fonction de n.

3. Etudier selon les valeurs de a, la convergence de la suite (u_n).