Fonction paire - Fonction impaire

1. Définitions et propriétés

Définition :

La fonction f définie sur I, I intervalle centré en 0, est **paire** si $f(-x) = f(x)$ pour tout x de I.

La fonction f définie sur I, I intervalle centré en 0, est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de I.

Propriété :

On considère le plan muni d'un repère orthogonal.

Si f est **paire**, sa représentation graphique est symétrique par rapport à **l'axe des ordonnées**.

Si f est **impaire**, sa représentation graphique est symétrique par rapport à **l'origine du repère**.

En conséquence, il suffit d'étudier la fonction sur les positifs pour la connaître sur tout l'intervalle I.

2. Exercices

Ex 1

Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? sur l'intervalle donné.

1. $\tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ sur $\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$
2. $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = |x|\cos x$ sur $\mathbb{R}$
4. $g(x) = \ln(|x - \sin x|)$ sur $\mathbb{R}$
5. $h(x) = \cos x + x$ sur $\mathbb{R}$

Ex 2

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. **a.** On suppose f paire. Etudier la parité de la fonction dérivée f'.

   b. On suppose f impaire. Etudier la parité de la fonction dérivée f'.

2. **a.** Démontrer que f est paire si et seulement si f' est impaire.

   On pourra considérer la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - f(-x)$.

   b. Démontrer que f est impaire si et seulement si f' est paire et $f(0) = 0$.