Système de trois équations à trois inconnues

1. Exemple et méthode

On va donner une méthode pour résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & = & -5 & & L_1 \\ 2x & + & 6y & - & z & = & 14 & & L_2 \\ 3x & + & 5y & + & 4z & = & 13 & & L_3 \end{array}\right.$$

a. Méthode

Propriété : On obtient un système équivalent (c'est-à-dire de même solution) en remplaçant une équation L_i par $aL_i + bL_j$ $(a \neq 0 \text{ et } i \neq j)$ et en gardant les autres équations.
Cette transformation est notée $L_i \longleftarrow aL_i + bL_j$

Méthode :

Objectif : se ramener à un système triangulaire qui est, lui, facile à résoudre par « remontée »

Etape 1 : éliminer les x dans L_2

Etape 2 : éliminer les x dans L_3

Etape 3 : éliminer les y dans L_3 (L_3 étant la nouvelle équation numéro 3)

Etape 4 : déterminer la valeur de z, puis de y, puis de x par « remontée »

b. Application de la méthode et résolution du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & = & -5 & & L_1 \\ 2x & + & 6y & - & z & = & 14 & & L_2 \\ 3x & + & 5y & + & 4z & = & 13 & & L_3 \end{array}\right.$$

On va utiliser le x pour éliminer les autres x

Etape 1 $(L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1)$

et **étape 2** $(L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1)$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & = & -5 & & L_1 \\ & & 2y & - & 3z & = & 24 & & L_2 \\ & & -y & + & z & = & 28 & & L_3 \end{array}\right.$$

On va utiliser le $2y$ pour éliminer le y de L_3

Etape 3 ($L_3 \longleftarrow 2L_3 + L_2$) : $\begin{cases} x + 2y + z = -5 & L_1 \\ \quad 2y - 3z = 24 & L_2 \\ \quad\quad -z = 80 & L_3 \end{cases}$ Le système obtenu est triangulaire

Etape 4 : on a d'après L_3, $\boxed{z = -80}$ puis d'après L_2 $\boxed{y = -108}$ et enfin d'après L_1 $\boxed{x = 291}$

Le système a donc pour solution le triplet $(291\,;\,-108\,;\,-80)$

c. Procéder de la même façon pour résoudre le système suivant :

Ex 1 $\begin{cases} -x + 3y - z = -6 \\ 3x + y - 4z = 5 \\ 4x - 7y + z = 17 \end{cases}$

2. Applications

a. Déterminer l'ensemble des points M $(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace tels que $f(M) = O$.

O étant l'origine du repère choisi et f une application de l'espace dans lui-même.

Ex 2 Soit la fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x - y + 5z, 4x + 2y - z, -2x + 3y + 2z)$.

Déterminer l'ensemble des points M $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $f(M) = O$ c'est-à-dire tels que $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Ex 3 Soit la fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (3x - y + 2z, x + 2y + 3z, 2x + y + 3z)$.

Déterminer l'ensemble des points M $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $f(M) = O$ c'est-à-dire tels que $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

b. Démontrer que trois vecteurs de l'espace sont libres

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace non nuls. On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **libres** si pour tout réel α, β et γ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$, on a : $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$.

Ex 4 Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ $(1\,;\,1\,;\,2)$, $\vec{v}$ $(-1\,;\,1\,;\,2)$ et $\vec{w}$ $(1\,;\,-2\,;\,1)$ sont libres.

Ex 5 Les vecteurs $\vec{u}$ $(2\,;\,1\,;\,-1)$, $\vec{v}$ $(1\,;\,3\,;\,1)$ et $\vec{w}$ $(-5\,;\,0\,;\,4)$ sont-ils libres ?

Remarque : si trois vecteurs de l'espace ne sont pas libres cela signifie qu'il existe α, β et γ non tous nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$. Exemple : $2\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{w} = \vec{0}$.

*On dit que les vecteurs sont **liés** et on a vu en Terminale S que cela signifiait que les vecteurs étaient coplanaires.*

Trois vecteurs de l'espace libres sont donc non coplanaires et si on choisit un point A de l'espace, alors $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère de l'espace et la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.