Notation sigma - Correction

1.

Notation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

a. Calculer une somme notée avec $\sum$

Ex 1

$$A = \sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = \boxed{30}$$

$$B = \sum_{k=1}^{n} 2 = \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n \text{ termes}} = 2 \times n = \boxed{2n}$$

$$C = \sum_{k=0}^{n} 3 = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{(n+1) \text{ termes}} = 3 \times (n+1) = \boxed{3n+3}$$

b. Ecrire une somme en notation $\sum$

Ex 2 Ecrire en notation $\sum$ les sommes suivantes :

$$S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = \boxed{\sum_{k=1}^{n} 2^k}$$

$$T = \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{2 \times 10} = \boxed{\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2 \times k}}$$

$$U = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{4} + 3\sqrt{5} + \cdots + 3\sqrt{20} = \boxed{\sum_{k=3}^{20} 3\sqrt{k}}$$

c. Relation entre deux sommes

Ex 3 Pour $n \geqslant 1$, on note : $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n.

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \boxed{S_n + (n+1)^2}$$

Ex 4 Pour $n \geqslant 1$, on note : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$.

Pour $n \geqslant 2$, exprimer S_n en fonction de S_{n-1}.

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(n+1)+1} = \boxed{S_n + \frac{1}{2n+3}}$$

2. Propriétés

Ex 5

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+n) = \sum_{k=1}^{n} 3k + \sum_{k=1}^{n} n = 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} n = 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + \quad n \quad \times \underbrace{n}_{\text{nbr de termes}} = \boxed{\frac{3n(n+1)}{2} + n^2}$$

Rappel : $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ *Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.*

a. Décalage d'indice

Ex 6

1. a. Ecrire $T_n = \sum_{k=0}^{n} x^{k+2}$ avec x^k au lieu de x^{k+2}.

$T_n = \sum_{k=0}^{n} x^{k+2}$ Premier terme de T : x^2 et dernier terme : x^{n+2}

donc : $T_n = \sum_{k=0}^{n} x^{k+2} = \boxed{\sum_{k=2}^{n+2} x^k}$

b. Ecrire $U_n = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ avec x^k au lieu de x^{k-1}.

$U_n = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ Premier terme de U : $1x^0$ et dernier terme : nx^{n-1}

donc : $U_n = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k}$

c. Ecrire $V_n = \sum_{k=1}^{n}(k+2)x^{k+1}$ avec x^k au lieu de x^{k+1}.

$V_n = \sum_{k=1}^{n}(k+2)x^{k+1}$ Premier terme de V : $3x^2$ et dernier terme : $(n+2)x^{n+1}$

donc : $V_n = \sum_{k=1}^{n}(k+2)x^{k+1} = \boxed{\sum_{k=2}^{n+1}(k+1)x^k}$

2. **a.** Ecrire $T_n = \sum_{k=0}^{n} x^{k+2}$ en fonction de $S_n = \sum_{k=1}^{n} x^k$:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} x^{k+2} = \sum_{k=2}^{n+2} x^k = \sum_{k=2}^{n} x^k + x^{n+1} + x^{n+2} = \sum_{k=1}^{n} x^k - x + x^{n+1} + x^{n+2} = \boxed{S_n - x + x^{n+1} + x^{n+2}}$$

b. Ecrire $U_n = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ en fonction de $W_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)x^k$:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k - (n+1)x^n = 1 + \sum_{k=1}^{n}(k+1)x^k - (n+1)x^n = \boxed{W_n + 1 - (n+1)x^n}$$

c. Ecrire $V_n = \sum_{k=1}^{n}(k+2)x^{k+1}$ en fonction de $W_n = \sum_{k=1}^{n}(k+1)x^k$:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n}(k+2)x^{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1}(k+1)x^k = \sum_{k=2}^{n}(k+1)x^k + (n+2)x^{n+1} = \sum_{k=1}^{n}(k+1)x^k - 2x + (n+2)x^{n+1}$$

$$= \boxed{W_n - 2x + (n+2)x^{n+1}}$$