Coefficients binomiaux : $\binom{n}{k}$ n et k entiers avec $0 \leqslant k \leqslant n$

1. Rappel de première et calcul de $\binom{n}{k}$

Lors d'une expérience aléatoire, on s'intéresse à une issue appelé succès, on parle d'épreuve de Bernoulli.

Quand on réalise n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, et que l'on représente l'arbre des issues possibles alors $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemin avec k succès parmi n.

Remarque : c'est aussi le nombre de chemins avec k échecs, puisque « succès » et « échec » jouent un rôle symétrique.

Propriété : Pour tout entier $n \geqslant 1$ et entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$

Ex 1 Calculer : $\binom{5}{2}$; $\binom{8}{5}$

2. Propriété et triangle de Pascal

Propriété : Pour tout entier $n \geqslant 1$ et entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Ex 2 Démontrer la propriété.

Propriété :

De la propriété : pour tout entier $n \geqslant 1$ et entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
on en déduit le triangle de Pascal ci-dessous :

$k \rightarrow$ $n \downarrow$	0	1	2	3	4	$\dots$
1	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	$\xrightarrow{+}$ 3	1		
4	1	4	$\overset{=}{\downarrow}$ 6	4	1	
$\vdots$	$\vdots$					$\ddots$

Par lecture du tableau : 6 est la valeur de $\binom{n}{k}$ pour $k = 2$ et $n = 4$ donc $\binom{4}{2} = 6$

Ex 3 Par complétion du triangle de Pascal, déduire les valeurs de : $\binom{5}{3}$; $\binom{6}{4}$

3. Développement de $(a+b)^n$

Propriété :

Pour tout réel a et b et tout entier $n \geqslant 1$, on a : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Les coefficients $\binom{n}{k}$ sont déterminés à partir du triangle de Pascal

$k \rightarrow$ $n \downarrow$	0	1	2	3	4	$\dots$	
1	1						
1	1	1					
2	1	2	1				$\rightarrow (a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
3	1	3	3	1			$\rightarrow (a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
4	1	4	6	4	1		*Remarque : on démarre avec a^n*
$\vdots$	$\vdots$					$\ddots$	*puis les puissances de a diminuent pendant que les puissances de b augmentent*
							et la somme des exposants de a et b pour chaque terme est égale à n

Ex 4 Développer les expressions suivantes :

$(1+x)^4$; $(2+3x)^3$; $(1-x)^3$; $(\sqrt{2}-2x)^5$