# Coefficients binomiaux - Correction

## a. Rappel de première et calcul de $\binom{n}{k}$

**Ex 1**

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

*Remarque :* $\binom{n}{k} = \dfrac{\text{´ } k \text{ facteurs décroissants dont } n \text{ est le plus grand »}}{\text{´ } k \text{ facteurs décroissants dont } k \text{ est le plus grand »}}$

*Exemple :* $\binom{7}{3} = \dfrac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}$

## b. Propriété et triangle de Pascal

**Ex 2** Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \times (n-(k+1))!}$$

$$= \frac{n!}{k! \times (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \times (n-k-1)!}$$

On met au même dénominateur :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n! \times (k+1) + n! \times (n-k)}{(k+1)! \times (n-k)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)! \times (n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)! \times (n-k)!} = \boxed{\frac{(n+1)!}{(k+1)! \times (n-k)!}}$$

et

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \times (n+1-(k+1))!} = \boxed{\frac{(n+1)!}{(k+1)! \times (n-k)!}}$$

**Conclusion** : on a bien prouvé que : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

**Ex 3**

| $k \rightarrow$ / $n \downarrow$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\dots$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

$$\binom{5}{3} = 10$$

$$\binom{6}{4} = 15$$

### c. Développement de $(a+b)^n$

| $k \rightarrow$ / $n \downarrow$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\dots$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | $\rightarrow (a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$ |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | $\rightarrow (a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$ |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | $\rightarrow (a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$ |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | $\rightarrow (a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$ |

**Ex 4** Développer les expressions suivantes :

$$(1+x)^4 = 1^4 + 4\times 1^3 \times x + 6\times 1^2 \times x^2 + 4\times 1\times x^3 + x^4 = \boxed{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}$$

$$(2+3x)^3 = 2^3 + 3\times 2^2 \times (3x) + 3\times 2\times (3x)^2 + (3x)^3 = \boxed{8+36x+54x^2+27x^3}$$

$$(1-x)^3 = (1+(-x))^3 = 1^3 + 3\times 1^2\times(-x) + 3\times 1\times(-x)^2 + (-x)^3 = \boxed{1-3x+3x^2-x^3}$$

$$(\sqrt{2}-2x)^5 = (\sqrt{2}+(-2x))^5$$

$$= (\sqrt{2})^5 + 5(\sqrt{2})^4 \times (-2x) + 10(\sqrt{2})^3 \times (-2x)^2 + 10(\sqrt{2})^2 \times (-2x)^3 + 5\sqrt{2}\times(-2x)^4 + (-2x)^5$$

$$= 4\sqrt{2} + 20\times(-2x) + 10\times 2\sqrt{2}\times 4x^2 + 20\times(-8x^3) + 5\sqrt{2}\times 16x^4 - 32x^5$$

$$= \boxed{4\sqrt{2} - 40x + 80\sqrt{2}x^2 - 160x^3 + 80\sqrt{2}x^2 - 32x^5}$$