Equations et inéquations avec second degré

Ex1 Résoudre les équations

1) $9x^2 = 4$

$x^2 = \frac{4}{9}$

$x = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ ou $x = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}$

$\boxed{S = \left\{\frac{2}{3} ; -\frac{2}{3}\right\}}$

2) $7x^2 = x$

⚠ Ne pas simplifier par x car x peut être nul.

$7x^2 - x = 0$

$x(7x-1) = 0$

donc $x = 0$ ou $x = \frac{1}{7}$

$\boxed{S = \left\{0 ; \frac{1}{7}\right\}}$

3) $\frac{3x}{2-x} = \frac{5}{3}$

Méthode : Produit en croix

$3x \times 3 = 5(2-x)$

$9x = 10 - 5x$

$14x = 10$

$x = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$ donc $\boxed{S = \left\{\frac{5}{7}\right\}}$

4) $\frac{x^2-1}{2} = \frac{-3}{1}$

Produit en croix : $x^2 - 1 = -6$

$x^2 = -5$

$\oplus \quad \ominus$

Impossible : aucune solution $\boxed{S = \emptyset}$

5) $(3-x)(-1+2x) = 0$

Méthode : Produit nul l'un des facteurs est nul.

$3 - x = 0$ ou $-1 + 2x = 0$

$x = 3$; $x = \frac{1}{2}$

$\boxed{S = \left\{3 ; \frac{1}{2}\right\}}$

6) $-5x(-1+2x) = 2$

⚠ Pas de produit nul ! Il faut développer.

$5x - 10x^2 = 2$

$-10x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = 25 - 4(-10)(-2)$

$\Delta = 25 - 80 = -55 < 0$

Pas de solution $\boxed{S = \emptyset}$

7) $\frac{3+4x}{3} = -2 + x$

Produit en croix : $3 + 4x = 3(-2+x)$

$3 + 4x = -6 + 3x$

$4x - 3x = -6 - 3$

$x = -9$

$\boxed{S = \{-9\}}$

Ex 2 Réduire au même dénominateur

$A = \frac{3}{2x-1} - 3x$

$A = \frac{3 - 3x(2x-1)}{2x-1}$

$A = \frac{3 - 6x^2 + 3x}{2x-1}$

$\boxed{A = \frac{-6x^2 + 3x + 3}{2x-1}}$

$B = \frac{2}{x-5} - x + 1$

$B = \frac{2 - x(x-5) + 1(x-5)}{x-5}$

$B = \frac{2 - x^2 + 5x + x - 5}{x-5}$

$\boxed{B = \frac{-x^2 + 6x - 3}{x-5}}$

⚠ Prendre $-x$ et 1 séparément !

$C = \frac{7}{x-4} - \frac{2}{x-3} = \frac{7(x-3) - 2(x-4)}{(x-4)(x-3)} = \frac{7x - 21 - 2x + 8}{(x-4)(x-3)}$

$\boxed{C = \frac{5x - 13}{(x-4)(x-3)}}$

$D = \frac{3}{x} - \frac{-x+2}{x+1}$

$D = \frac{3(x+1) - x(-x+2)}{x(x+1)}$

$D = \frac{3x + 3 + x^2 - 2x}{x(x+1)}$

$\boxed{D = \frac{x^2 + x + 3}{x(x+1)}}$

⚠ le dénominateur commun n'est pas $x + 1$! Il faut multiplier le numérateur et dénominateur pour changer le dénominateur d'une fraction

Astuce : Ne pas développer le dénominateur, le produit pourrait apporter dans la suite d'un exercice des simplifications.

Ex 3 Déterminer le signe

$*A = -x^2 + 3x$ (trinôme "incomplet")

$\rightarrow$ racines : $-x^2+3x = 0$

$x(-x+3) = 0$

$x = 0 \quad x = 3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-x^2+3x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

} car $a = -1 < 0$

$*B = \dfrac{-2x+3}{x-2} - 2$ Méthode : Réduire au même dénominateur $\rightarrow$ Signe d'un quotient.

$B = \dfrac{-2x+3-2(x-2)}{x-2}$

$B = \dfrac{-2x+3-2x+4}{x-2} = \boxed{\dfrac{-4x+7}{x-2}}$ $\leftarrow ax+b$ $\leftarrow ax+b$

- $-4x+7 = 0$ pour $x = \dfrac{7}{4}$ et $a = -4 < 0$ donc f° affine $\searrow$ donc signe : $+ \; 0 \; -$
- $x-2 = 0$ pour $x = 2$ et $a = 1 > 0$ donc f° affine $\nearrow$ donc signe $- \; 0 \; +$.

x		$7/4$		2		$+\infty$
$-4x+7$	$+$	0	$-$		$-$	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-4x+7}{x-2}$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

$*C = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{2x}$. Méthode : Réduire au même dénominateur $\rightarrow$ Signe d'un quotient

$C = \dfrac{2-3}{2x} = -\dfrac{1}{2x} = \boxed{\dfrac{-1}{2x}}$ Numérateur négatif.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-1}{2x}$		$+$	$\|$	$-$	

$*D = (x^2+3)(6-2x)$

Remarque x^2+3 toujours positif et ne s'annule pas.

On cherche le signe de $6-2x$ (forme $ax+b$)

- $6-2x = 0$ pour $x = 3$

$a = -2 < 0$ donc f° affine décroissante.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
x^2+3		$+$		$+$	
$6-2x$		$+$	0	$-$	
$(x^2+3)(6-2x)$		$+$	0	$-$	

Ex 4 Résoudre les inéquations

1) $-7x + \dfrac{1}{3} < \dfrac{3x}{5}$

$-7x - \dfrac{3x}{5} < -\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{-35x-3x}{5} < -\dfrac{1}{3}$

$-\dfrac{38x}{5} < -\dfrac{1}{3}$) $\times 5 > 0$

$-38x < -\dfrac{5}{3}$) $:(-38) < 0$

$x > -\dfrac{5}{3} \times \dfrac{1}{-38}$

$x > \dfrac{5}{114}$

$\boxed{S = \left]\dfrac{5}{114} ; +\infty\right[}$

2) $\dfrac{2x}{5-4x} \geq 1$

$\dfrac{2x}{5-4x} - 1 \geq 0$

$\dfrac{2x-1(5-4x)}{5-4x} \geq 0$

$\dfrac{2x-5+4x}{5-4x} \geq 0$

$\boxed{\dfrac{6x-5}{5-4x} \geq 0}$ $\rightarrow ax+b$ $\rightarrow ax+b$.

x	$-\infty$		$5/6$		$5/4$		$+\infty$
$6x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$5-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{6x-5}{5-4x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

$\boxed{S = \left[\dfrac{5}{6} ; \dfrac{5}{4}\right[}$

3) $6x^2 < 2x$

$\underbrace{6x^2 - 2x}_{\text{trinôme (incomplet)}} < 0$

→ racines : $6x^2 - 2x = 0$

$x(6x - 2) = 0$

$x = 0 \quad x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

→ $a = 6 > 0$

x	$-\infty$		0		$1/3$		$+\infty$
$6x^2 - 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $\boxed{S =]0 ; \frac{1}{3}[}$

4) $x^2 \leq 20$.

$\underbrace{x^2 - 20}_{\text{trinôme (incomplet)}} \leq 0$

→ racines : $x^2 - 20 = 0$ → $a = 1 > 0$

$x^2 = 20$

$x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

ou $x = -\sqrt{20} = -2\sqrt{5}$

x		$-2\sqrt{5}$		$2\sqrt{5}$	
$x^2 - 20$	$+$	0	$-$	0	$+$

donc $\boxed{S = [-2\sqrt{5} ; 2\sqrt{5}]}$