Tangentes à une courbe - Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans ce repère.

Ex 1 Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=3\sqrt{x}-x$.

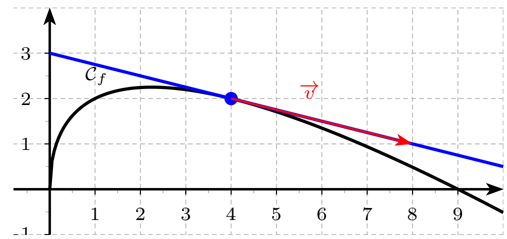
1. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.

La tangente a pour équation : $y=f'(4)(x-4)+f(4)$.

Pour $x\neq 0$, on a $f'(x)=3\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-1$ donc $f'(4)=3\times\dfrac{1}{4}-1=\boxed{\dfrac{-1}{4}}$

et $f(4)=3\times 2-4=\boxed{2}$

Conclusion : $y=\dfrac{-1}{4}(x-4)+2$ soit $\boxed{y=\dfrac{-1}{4}x+3}$



2. Tracer cette tangente.

Le coefficient directeur de la tangente est $\dfrac{-1}{4}$

donc la tangente a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1\ ;\ \dfrac{-1}{4}\right)$ ou $\vec{v}\ (4\ ;\ -1)$

3. Déterminer l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

Le point d'intersection $(x\,;y)$ avec l'axe des abscisses vérifie $\boxed{y=0}$ et ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente

soit $\dfrac{-1}{4}x+3=0$, ce qui donne $\boxed{x=12}$.

Conclusion : le point d'intersection a pour coordonnées $\boxed{(12\,;0)}$, ce qui paraît cohérent avec graphique.

Ex 2 Soit la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{2-5x}$.

Déterminer le(s) point(s) de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Une droite est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si son coefficient directeur est égal à 0.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$.

On cherche donc les nombres a de $[1\,;+\infty[$ tels que $f'(a)=0$.

Pour cela, on va résoudre $f'(x)=0$

Calcul de $f'(x)$: $f'(x)=\dfrac{2x(2-5x)-x^2\times(-5)}{(2-5x)^2}=\dfrac{4x-10x^2+5x^2}{(2-5x)^2}$ donc $\boxed{f'(x)=\dfrac{-5x^2+4x}{(2-5x)^2}}$

On a : $f'(x)=0\iff -5x^2+4x=0$

$\iff x(-5x+4)=0$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -5x + 4 = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{4}{5}$$

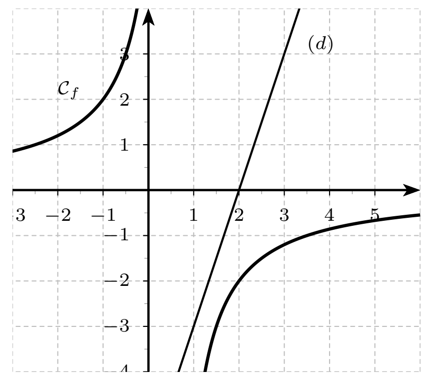
La seule valeur possible est donc $a = \dfrac{4}{5}$ puisque 0 n'appartient pas à $[1\,;\,+\infty[$.

Il existe donc une seule tangente à la courbe qui est parallèle à l'axe des abscisses, c'est la tangente au point d'abscisse $\dfrac{4}{5}$.

Ex 3 Soit la fonction f définie pour $x \neq \dfrac{1}{2}$ par $f(x) = \dfrac{6}{1-2x}$.

On donne ci-contre sa représentation graphique ainsi que la droite (d) d'équation $y = 3x - 6$.

Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite (d).



Une droite est parallèle à la droite (d) si et seulement si son coefficient directeur est égal à celui de (d).

La droite (d) a pour coefficient directeur 3.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$.

On cherche donc les nombres a $\left(a \neq \dfrac{1}{2}\right)$ tels que $f'(a) = 3$.

Pour cela, on va résoudre $f'(x) = 3$.

Calcul de $f'(x)$: on a : $\quad f(x) = 6 \times \dfrac{1}{1-2x} \quad$ donc $\quad f'(x) = 6 \times \dfrac{-(-2)}{(1-2x)^2} \quad$ donc $\quad \boxed{f'(x) = \dfrac{12}{(1-2x)^2}}$

On a : $\quad f'(x) = 3 \iff \dfrac{12}{(1-2x)^2} = 3$

$$\iff (1-2x)^2 = 4$$

$$\iff 1 - 2x = 2 \quad \text{ou} \quad 1 - 2x = -2$$

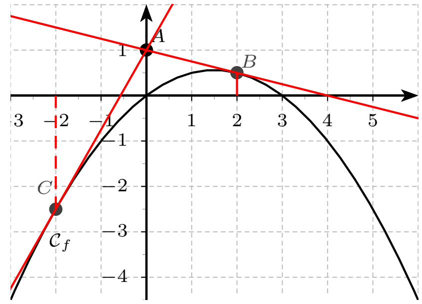
$$\iff x = \frac{-1}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{2}$$

Les deux valeurs trouvées sont possibles donc $\boxed{a = \dfrac{-1}{2}}$ ou $\boxed{a = \dfrac{3}{2}}$.

Remarque : on vérifie graphiquement que les tangentes aux points trouvés semblent être parallèles à la droite (d).

Ex 4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x^2+3x}{4}$.

Déterminer les points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente passe par le point A $(0\,;\,1)$ puis tracer ces tangentes.



La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

On a $f(x) = \dfrac{1}{4} \times (-x^2+3x)$

donc $f'(x) = \dfrac{1}{4} \times (-2x+3)$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{-2x+3}{4}}$.

L'équation de la tangente est donc : $y = \dfrac{-2a+3}{4}(x-a) + \dfrac{-a^2+3a}{4}$.

Le point A $(0\,;\,1)$ appartient à la tangente donc ses coordonnées vérifient l'équation.

On cherche donc les nombres a tels que $\dfrac{-2a+3}{4}(0-a) + \dfrac{-a^2+3a}{4} = 1$

c'est-à-dire $\dfrac{2a^2-3a}{4} + \dfrac{-a^2+3a}{4} = 1$

soit $\dfrac{a^2}{4} = 1$ d'où $a^2 = 4$ et donc $\boxed{a = 2}$ ou $\boxed{a = -2}$

Pour tracer les tangentes, on place sur $\mathcal{C}_f$ les points B et C d'abscisses respectives 2 et -2, puis on trace les droites (AB) et (AC).

Ex 5 Soient b et c deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + bx + c$.

Déterminer les valeurs de b et c sachant que $f(1) = 2$ et $f'(1) = -3$.

$f(1) = 2$ donc $3+2+b+c = 2$ soit $b+c = -3$

On a : $f'(x) = 9x^2 + 4x + b$ et d'après $f'(1) = -3$ on a $9+4+b = -3$ donc $\boxed{b = -16}$

On en déduit donc la valeur de c puisque $c = -3 - b$ donc $\boxed{c = 13}$

Conclusion : $\boxed{f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 16x + 13}$

Ex 6 Soient a et b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + 1$.

Déterminer les valeurs de a et b sachant que la droite d'équation $y = 4x - 1$ est tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

La tangente au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur $f'(2)$.

La tangente ayant pour équation $y = 4x - 1$, on en déduit que $\boxed{f'(2) = 4}$

La tangente au point d'abscisse 2 ayant pour équation $y = 4x - 1$, on en déduit que le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2 a pour coordonnées $(2\,;\,7)$ (en effet pour $x = 2$, on a $y = 4 \times 2 - 1$). On a donc $\boxed{f(2) = 7}$

D'après $f(2) = 7$, on a $4a + 2b + 1 = 7$ d'où $4a + 2b = 6$ ou $\boxed{2a + b = 3}$

On a $f'(x) = 2ax + b$ donc d'après $f'(2) = 4$ on a $\boxed{4a + b = 4}$

On résout donc le système : $\begin{cases} 2a + b = 3 & L_1 \\ 4a + b = 4 & L_2 \end{cases}$

$L_2 - L_1$ donne $2a = 1$ donc $\boxed{a = \dfrac{1}{2}}$

puis d'après L_1, $b = 3 - 2a = 3 - 1$ donc $\boxed{b = 2}$

Conclusion : $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 1}$