Intégration par parties - Correction

Soient u et v deux fonctions continues et dérivables sur $[a\,;\,b]$ telles que leur dérivée u' et v' sont continues.

Formule appelée « intégration par parties » : $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x$

Ex 1 Calculer $\displaystyle\int_1^2 x\ln x\ \mathrm{d}x$

On ne sait pas intégrer la fonction ln, on va donc la dériver.

On pose donc $\ln x = v(x)$ et $x = u'(x)$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \underbrace{x}_{u'(x)}\underbrace{\ln x}_{v(x)}\ \mathrm{d}x &= \left[\underbrace{\frac{x^2}{2}\times\ln x}_{u(x)v(x)}\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u(x)}\times\underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\ \mathrm{d}x\\
&= \left(2\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \int_1^2 \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x\\
&= 2\ln 2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2\\
&= 2\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)\\
&= \boxed{2\ln 2 - \frac{3}{4}}
\end{aligned}$$

Ex 2 Calculer $\displaystyle\int_0^\pi x\sin x\ \mathrm{d}x$

On peut dériver ou intégrer les deux fonctions situées sous l'intégrale.

Pour obtenir une intégrale plus simple, on décide de dériver x.

On pose donc $x = u(x)$ et $\sin x = v'(x)$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{\sin x}_{v'(x)}\ \mathrm{d}x &= \left[\underbrace{x\times(-\cos x)}_{u(x)v(x)}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{1}_{u'(x)}\times\underbrace{(-\cos x)}_{v(x)}\ \mathrm{d}x\\
&= (-\pi\cos\pi - 0) + \int_0^\pi \cos x\ \mathrm{d}x\\
&= \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi + \sin\pi - \sin 0 = \boxed{\pi}
\end{aligned}$$

Ex 3 Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 1$.

A l'aide d'une intégration par parties, écrire une relation entre I_{n+1} et I_n.

On a : $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1} \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$

Pour obtenir une relation entre I_{n+1} et I_n, il faut donc dériver x^{n+1}.

On pose donc $x^{n+1} = u(x)$ et $\mathrm{e}^x = v'(x)$.

On a donc :
$$I_{n+1} = \int_0^1 \underbrace{x^{n+1}}_{u(x)} \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v'(x)} \, \mathrm{d}x = \Big[\underbrace{x^{n+1} \times \mathrm{e}^x}_{u(x)v(x)}\Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{(n+1)x^n}_{u'(x)} \times \underbrace{\mathrm{e}^x}_{v(x)} \, \mathrm{d}x$$
$$= (\mathrm{e} - 0) - (n+1) \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e} - (n+1) I_n$$

Conclusion : $\boxed{I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1) I_n}$

Ex 4 Soit $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2 (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$ pour $n \geqslant 1$.

Démontrer que $3I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}^3$.

On a : $I_{n+1} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^2 (\ln x)^{n+1} \, \mathrm{d}x$

Pour obtenir une relation entre I_{n+1} et I_n, il faut donc dériver $(\ln x)^{n+1}$.

On pose donc $x^2 = u'(x)$ et $(\ln x)^{n+1} = v(x)$.

On a donc :
$$I_{n+1} = \int_1^{\mathrm{e}} \underbrace{x^2}_{u'(x)} \underbrace{(\ln x)^{n+1}}_{v(x)} \, \mathrm{d}x = \Bigg[\underbrace{\frac{x^3}{3} \times (\ln x)^{n+1}}_{u(x)v(x)}\Bigg]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{u(x)} \times \underbrace{(n+1)(\ln x)^n \times \frac{1}{x}}_{v'(x)} \, \mathrm{d}x$$
$$= \left(\frac{\mathrm{e}^3}{3} (\underbrace{\ln \mathrm{e}}_{1})^{n+1} - \frac{1}{3} (\underbrace{\ln 1}_{0})^{n+1}\right) - \frac{n+1}{3} \int_1^{\mathrm{e}} x^2 (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$$
$$= \left(\frac{\mathrm{e}^3}{3} - 0\right) - \frac{n+1}{3} \int_1^{\mathrm{e}} x^2 (\ln x)^n \, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

On a démontré que : $I_{n+1} = \dfrac{\mathrm{e}^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$

et donc : $3I_{n+1} = \mathrm{e}^3 - (n+1)I_n$ puis $\boxed{3I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}^3}$