Dérivation - Correction

Le plan est muni d'un repère.

Ex 1 Soient $f(x) = \dfrac{3x+7}{2x-2}$ pour x différent de 1 et les points A (3 ; 4) et B (-1 ; 9).

1. Vérifier que le point A appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

3. En déduire que la tangente est la droite (AB).

Réponse :

1. $A(3\,;\,4) \in \mathcal{C}_f$ si $f(3) = 4$. On a : $f(3) = 9 + 7 = 4$ donc $A \in \mathcal{C}_f$.

2. Coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A : $f'(3)$.

On a : $f'(x) = \dfrac{3(2x-2)-(3x+7)\times 2}{(2x-2)^2} = \dfrac{6x-6-6x-14}{(2x-2)^2} = \dfrac{6x-6-6x-14}{(2x-2)^2}$

donc $f'(3) = \dfrac{-20}{16}$ donc $\boxed{f'(3) = \dfrac{-5}{4}}$

Conclusion : la tangente a pour coefficient directeur $\dfrac{-5}{4}$

3. La tangente en A et la droite (AB) ont le point A en commun, donc pour montrer que ces deux droites sont les mêmes, il suffit de montrer qu'elles ont le même coefficient directeur.

Calcul du coefficient directeur de (AB) : $\text{Coeff}(AB) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5}{-4} = \boxed{\dfrac{-5}{4}}$

Conclusion : la droite (AB) est donc bien la tangente à la courbe de f au point A.

Ex 2 Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2 pour $f(x) = x^3 - x$

Réponse :

La tangente a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ donc $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

- Calcul de $f'(-2)$: $f'(x) = 3x^2 - 1$ donc $f'(-2) = 11$
- Calcul de $f(-2)$: $f(-2) = (-2)^3 + 2 = -6$
- Equation de la tangente : $y = 11(x+2) - 6$ donc $\boxed{y = 11x + 16}$