Etude d'un signe - Correction

Ex 1

1. Déterminer le signe de $-5x^3+3x^2$

Réponse :

On factorise : $-5x^3+3x^2=x^2(-5x+3)$

- x^2 est toujours positif et s'annule pour $x=0$
- $-5x+3$ est du type $ax+b$ avec $a=-5<0$

donc fonction affine décroissante et $-5x+3=0$ pour $x=\dfrac{3}{5}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	|	$+$	
$-5x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x^2(-5x+3)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

2. Déterminer le signe de $\dfrac{4x}{x+4}-x+2$ pour $x\neq -4$.

En déduire les solutions de $\dfrac{4x}{x+4}-x+2\geqslant 0$

Réponse :

On réduit au même dénominateur :

$$\frac{4x}{x+4}-x+2=\frac{4x-x(x+4)+2(x+4)}{x+4}=\frac{4x-x^2-4x+2x+8}{x+4}=\boxed{\frac{-x^2+2x+8}{x+4}}$$

- $-x^2+2x+8$: trinôme du second degré

On résout : $-x^2+2x+8=0$ $\quad\Delta=b^2-4ac=4-4\times(-1)\times 8=36$ donc $\sqrt{\Delta}=\sqrt{36}=6$

On en déduit les deux racines : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+6}{-2}=\boxed{-2}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-6}{-2}=\boxed{4}$

Rappel : le trinôme est du signe de a sauf entre les racines, si elles existent. ($a=-1<0$)

- $x+4$ est du type $ax+b$ avec $b=1>0$ donc fonction affine croissante et $x+4=0$ pour $\boxed{x=-4}$

x	$-\infty$		-4		-2		4		$+\infty$
$-x^2+2x+8$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\dfrac{-x^2+2x+8}{x+4}$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

Solutions de $\dfrac{4x}{x+4}-x+2\geqslant 0$: $\boxed{\mathrm{S}=]-\infty\ ;\ -4[\cup[-2\ ;\ 4]}$

3. Déterminer le signe de $-3\sqrt{x}+2$ pour x positif.

Méthode 1 : on ne reconnaît pas de type connu, donc on résout $-3\sqrt{x}+2>0$ puis $-3\sqrt{x}+2=0$ pour déterminer le signe.

$-3\sqrt{x}+2>0 \Leftrightarrow -3\sqrt{x}>-2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}<\dfrac{2}{3}$ Division par un nombre négatif, on change donc le sens de l'inégalité.

$\Leftrightarrow 0 \leqslant x<\dfrac{4}{9}$ La fonction carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

On ne change donc pas le sens de l'inégalité.

Conclusion : $\boxed{-3\sqrt{x}+2>0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x<\dfrac{4}{9}}$

et on déduit des calculs précédents que $\boxed{-3\sqrt{x}+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{9}}$

Réponse : tableau de signe de $-3\sqrt{x}+2$ pour $x \geqslant 0$

x	0		$\frac{4}{9}$		$+\infty$
$-3\sqrt{x}+2$		$+$	0	$-$	

Méthode 2 : on détermine le signe à partir des variations de la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par $f(x)=-3\sqrt{x}+2$ et des valeurs qui annulent cette fonction.

• Sur $[0\,;+\infty[$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante

donc la fonction $x \longmapsto -3\sqrt{x}+2$ est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

(car multiplication par un nombre négatif qui change le sens de variation).

(Voir la fiche *Variations d'une fonction* pour plus d'explication)

• $-3\sqrt{x}+2=0$ pour $\sqrt{x}=\dfrac{2}{3}$ et donc $x=\dfrac{4}{9}$ car $x \geqslant 0$.

• **Conclusion** : on en déduit le tableau de variations et de signe suivant :

x	0		$\frac{4}{9}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	