Suites - Correction

Ex 1 Soit la suite (U_n) définie par $U_1 = 3$ et $U_{n+1} = 2U_n - 4(n+1)$ pour tout $n \geqslant 0$.

Calculer U_2 et U_3

Réponse :

$$U_2 = 2U_1 - 4 \times 2 = 6 - 8 = \boxed{-2}$$

$$U_3 = 2U_2 - 4 \times 3 = -4 - 12 = \boxed{-16}$$

Ex 2 Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = -5$, $U_1 = 2$ et $U_{n+2} = U_n - \dfrac{2U_{n+1}}{n+3}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Calculer U_2 et U_3

Réponse :

$$U_2 = U_0 - \frac{2U_1}{3} = -5 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{-19}{3}}$$

$$U_3 = U_1 - \frac{2U_2}{3} = 2 - \frac{2 \times \frac{-19}{3}}{3} = 2 - \frac{-38}{9} = \boxed{\frac{56}{9}}$$

Ex 3 Soit la suite (U_n) arithmétique de raison $\dfrac{1}{10}$ et de premier terme $U_0 = -4$.

1. Calculer U_{20}.

Réponse :

$$U_n = U_0 + nr \quad \text{donc} \quad U_{20} = U_0 + 20r = -4 + 20 \times \frac{1}{10} = \boxed{-2}$$

2. Calculer la somme $U_0 + U_1 + \cdots + U_{20}$

Réponse :

$$U_0 + U_1 + \cdots + U_{20} = \frac{(U_0 + U_{20}) \times 21}{2} = \frac{(-4-2) \times 21}{2} = \frac{-6}{2} \times 21 = -3 \times 21 = \boxed{-63}$$

Ex 4 Soit la suite (U_n) géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $U_0 = 8$.

1. Calculer U_9.

Réponse :

$$U_n = U_0 \times q^n \quad \text{donc} \quad U_9 = U_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 8 \times \frac{1}{2^9} = \frac{2^3}{2^9} = \frac{1}{2^6} = \boxed{\frac{1}{64}}$$

2. Calculer la somme $U_0 + U_1 + \cdots + U_9$

Réponse :

$$U_0 + U_1 + \cdots + U_9 = U_0 \times \frac{1-q^{10}}{1-q} = 8 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 8 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2^{10}}\right)}{\frac{1}{2}} = \boxed{16 \times \left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)} = \boxed{\frac{1023}{64}}$$

Ex 5 Soit une suite (U_n) définie par $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = U_n - 6$ pour tout entier naturel n.

1. Exprimer U_n en fonction de n.

Réponse :

La suite est arithmétique de raison -6 donc $U_n = U_0 + nr$ soit $\boxed{U_n = 5 - 6n}$

2. Calculer la somme $U_0 + U_1 + \cdots + U_{12}$

Réponse :

$$U_{12} = 5 - 6 \times 12 = \boxed{-67}$$

$$U_0 + U_1 + \cdots + U_{12} = \frac{(U_0 + U_{12}) \times 13}{2} = \frac{(5-67) \times 13}{2} = \frac{-62}{2} \times 13 = -31 \times 13 = \boxed{-403}$$

Ex 6 Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 3U_n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer U_7

Réponse :

La suite est géométrique de raison 3 donc $U_n = U_0 \times q^n$ donc $U_7 = U_0 \times q^7 = 2 \times 3^7 = \boxed{4\ 374}$

2. Exprimer U_n en fonction de n.

Réponse :

$$U_n = U_0 \times q^n = \boxed{2 \times 3^n}$$

3. Calculer la somme $U_0 + U_1 + \cdots + U_7$.

Réponse :

$$U_0 + U_1 + \cdots + U_7 = U_0 \times \frac{1-q^8}{1-q} = 2 \times \frac{1-3^8}{1-3} = 2 \times \frac{1-3^8}{-2} = -(1-3^8) = 3^8 - 1 = \boxed{6\ 560}$$

Ex 7

1. Démontrer que la suite (U_n) définie par $U_n = \dfrac{-5n+2}{3}$ est une suite arithmétique.

Réponse :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-5(n+1)+2}{3} - \frac{-5n+2}{3} = \frac{-5n-3}{3} - \frac{-5n+2}{3} = \frac{-5n-3-(-5n+2)}{3} = \frac{-5}{3}$$

donc $\boxed{U_{n+1} = U_n - \dfrac{5}{3}}$ La suite (U_n) est donc arithmétique de raison $\dfrac{-5}{3}$

2. Démontrer que la suite (U_n) définie par $U_n = \dfrac{2\sqrt{5}}{3^n}$ est une suite géométrique.

Réponse :

$$U_{n+1} = \frac{2\sqrt{5}}{3^{n+1}} = \frac{2\sqrt{5}}{3^n \times 3} = \frac{2\sqrt{5}}{3^n} \times \frac{1}{3} = U_n \times \frac{1}{3}$$

Conclusion : $\boxed{U_{n+1} = U_n \times \dfrac{1}{3}}$. La suite (U_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$

Ex 8 Étudier les variations des suites ci-dessous :

1. (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + n - 12$ pour tout entier naturel n.

Réponse :

$U_{n+1} - U_n = n - 12$

Pour $n \geqslant 12$, on a $n - 12 \geqslant 0$ donc $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant 12$.

On en conclut donc que la suite (U_n) est croissante à partir du rang 12.

2. (U_n) définie par $U_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout entier naturel n.

Réponse :

Méthode 1 : Déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$

Méthode 2 : Remarquer que $U_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ pour $x \geqslant 0$ puis étudier les variations de f.
Si la fonction f est monotone sur un intervalle du type $[p\,;+\infty[$ (p entier naturel) alors à partir du rang p la suite (U_n) a la même variation que f .

Réponse : méthode 1 :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} < U_n$ et donc la suite (U_n) est décroissante.

Réponse : méthode 2 :

- Étude des variations de f sans dérivée :

On sait que la fonction $x \longmapsto x+1$ est croissante sur $\mathbb{R}$ (affine avec $a = 1 > 0$) et elle est positive sur $[0\,;\,+\infty[$.

D'où on en déduit que $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

- Étude des variations de f avec dérivée :

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$ et donc f décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Conclusion : la suite (U_n) est décroissante.

3. (U_n) définie par $U_n = 2^n - n$ pour tout entier naturel n.

Réponse :

$U_{n+1} - U_n = 2^{n+1} - (n+1) - (2^n - n) = 2^{n+1} - n - 1 - 2^n + n = 2^{n+1} - 2^n - 1 = 2^n\,(2-1) - 1 = \boxed{2^n - 1}$

$2^0 = 1$; $2^1 = 2$ Pour tout n entier naturel $2^n \geqslant 1$ donc $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$

Conclusion : la suite (U_n) est croissante.